中国科学: 数学　2016 年　第 46 卷　第 ? 期: 1～XX
SCIENTIA SINICA　Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

半正定张量

献给张恭庆教授80 华诞

罗自炎[①], 祁力群[②]*

① 北京交通大学轨道交通控制与安全国家重点实验室, 北京100044;
② 香港理工大学应用数学系, 九龙, 香港
E-mail: starkeynature@hotmail.com, liqun.qi@polyu.edu.hk

收稿日期: 20XX-XX-XX; 接受日期: 20XX-XX-XX; 网络出版日期: 20XX-XX-XX; *通信作者
香港Research Grant Council (批准号: PolyU 502111, 501212, 501913, 15302114)以及国家自然科学基金(批准号: 11301022, 11431002) 资助项目

摘要　随着大数据时代的来临, 承载高阶高维信息的张量结构备受关注, 从而引发了关于张量的理论、计算、应用的广泛研究。与矩阵的情形类似, 作为张量理论的一个重要组成部分的半正定张量理论, 也在实际问题中凸显出不可或缺的作用。本文旨在对张量的半正定性理论进行简单的梳理与总结, 并希望对张量理论的未来发展提供可能的研究方向.

关键词　半正定张量　结构张量　张量特征值

MSC (2010) 主题分类　15A18, 15A69, 53A45

1　引言

矩阵论作为数学的一个经典基本理论, 应用于科学和工程的各个方面. 上世纪八十年代, 由于大规模数据分析的发展, 张量分解这一新的研究领域应运而生. 目前关于张量分解的文献已超过二千余篇, 其中的张量是在座标体系下的数学反映, 与物理以及几何中的张量不同. 严格地说, 本文所探讨的张量可以叫做超矩阵, 即矩阵的元素有两个下标, 而超矩阵的下标有 m 个, 其中 m 称之为这个超矩阵的阶. 显然, 零阶超矩阵即为标量, 一阶超矩阵即为向量, 二阶超矩阵即为矩阵. 张量分解的研究对象即为高阶超矩阵. 考虑到张量分解、张量填充等文献中已用了张量 (tensor) 一词; 此外, 如向量(vector)一词, 虽有物理中的向量与其在一个座标体系下的数学表示之别, 但英文上都叫 vector, 中文都叫向量或矢量. 因此, 本文将超矩阵 (hypermatrix) 统称为张量(tensor).

张量分解和传统的多重线性代数的区别在于它将张量本身作为一个实体开展分解等性质的研究, 而不仅仅局限于研究张量之间的乘积运算等. 这就催生了现代多重线性代数 (multi-linear algebra) 理论. 该理论可以看作矩阵论的发展. 由于矩阵的特征值理论, 或称为矩阵谱理论, 是矩阵论的一个重要内容, 2005 年 Qi [1] 和 Lim [2] 分别提出了张量特征值的概念. 其中 Qi 的特征值理论是基于控制理论中偶数阶张量的半正定和正定性建立的. Qi 证明了偶数阶对称张量半正定(正定) 的充要条件

英文引用格式: Luo Z, Qi L. Positive Semidefinite Tensors (in Chinese). Sci Sin Math, 2016, 46: 1–XX, doi: 10.1360/XXXX

　

是所有H-特征值或 Z-特征值非负(正). 这一性质将对称矩阵特征值性质推广到了高阶张量的情形. 2008年, 该类张量特征值在核磁高阶张量成象中得到应用 [3]. 2008年开始, 张恭庆教授等将非负矩阵的 Perron-Frobenius 理论系统地推广到非负张量 [4–6]. 2009 年, Ng, Qi 和 Zhou 提出了求非负张量最大特征值的算法并用于高阶马尔可夫链的研究 [7]. 同年, 意大利学者 Bulò 和 Pelillo 将非负张量最大特征值用于超图谱理论的研究 [8]. 之后三年, 张量谱理论迅速发展. 2012 年在南开大学陈省身数学所举行了张量谱理论第一次国际会议. 2013 年, 在福州大学举行了图和超图谱国际研讨会.

然而, 张量理论的发展也面临极大挑战. 2013 年, Hillar 与 Lim 论证了多数张量问题是NP-hard [9]. 此外, 矩阵逆的概念还未成功推广到一般高阶张量中; 矩阵行列式已经推广到了张量行列式, 但用到代数几何里结式的概念, 计算比较复杂. 因此, 不免让人产生这样的疑惑: 对高阶张量而言, 是否只有非负张量最大特征值有很方便的计算方法呢? 这个观点被证明过于悲观. 事实上, 对许多偶数阶张量的正定性和半正定性, 存在着许多容易检查的充分条件. 2005 年 Qi [1] 给出了张量特征值的圆盘定理, 从而证明了偶数阶对称对角占优的张量是半正定的. 因此, 超图谱理论中的偶数阶一致超图的 Lapacian 和无号 Laplacian 张量均为半正定张量. 近两年, 各种容易检查的偶数阶张量正定和半正定充分条件相继被发现, 极大地丰富了张量理论. 这些容易检查的充分条件可分为如下几种. 一种是从矩阵论直接推广而来. 如偶数阶 Hilbert 张量, 偶数阶正 Cauchy 张量, 偶数阶对称 M-张量与 H-张量等均为半正定张量. 另一种是结论可直接从矩阵论引伸出来. 但原有矩阵论的证明方法不可推广到高阶张量, 需要另辟新的证明方法. 如对称 B_0 矩阵的半正定性是西班牙学者 Peña 于2001 年用子式非负的办法证明的 [10]. 该证明方法不能直接推广到张量情形. 2014 年, Qi 和 Song 用分解方法证明了偶数阶对称 B_0- 张量是半正定的 [11]. 之后一系列从 B_0 张量推广出来的偶数阶对称张量也被证明是半正定的. 第三种情况是原来矩阵论里没有的, 但和矩阵论密切相关. 例如相同生成向量的不同阶 Hankel 张量半正定性的遗传性等 [12].

半正定和正定张量的研究不仅进一步推动了张量其它理论, 如超图谱理论和张量互补问题的研究, 也吸引了许多矩阵论学者参与张量理论的研究. 例如, 非负矩阵经典书籍 [13] 的作者以色列数学家Berman 也开始了对张量半正定性的研究. 此外, 关于张量的国际会议也相继召开, 如2014 年在苏州举行了张量和矩阵国际学术会议, 得到世界线性代数协会认可, 其会长亲自到会报告; 2015年在长沙举行了张量优化研讨会; 在西宁举行了超图和复杂系统国际研讨会; 以及即将在 2016 年于南开大学陈省身数学研究所举行张量和矩阵国际学术会, 于哈尔滨举行超图谱理论国际研讨会等. 越来越多的国内外学者投入到张量理论与应用的研究大潮中. 本文旨在对张量的半正定和正定性理论作一综述, 并指出某些潜在的研究方向, 以期将读者引入张量研究前沿.

2 半正定张量的谱

作为半正定矩阵的高阶自然推广, 半正定张量的引入与非负多项式密切相关. 对于任意n 维实向量$\mathbf{x}$, 若相应的齐次多项式$\mathcal{A}\mathbf{x}^m := \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} a_{i_1\cdots i_m} x_{i_1}\cdots x_{i_m} \geqslant 0$, 则称系数张量$\mathcal{A}$ 为半正定张量. 当$m = 2$ 时, 即为大家所熟悉的半正定矩阵. 众所周知, 半正定矩阵的研究是矩阵理论与分析的一个基础而重要的组成部分. 作为其张量推广的半正定张量自然引起了张量理论与分析学者的关注. 本节我们将简单介绍半正定张量的谱性质.

高阶张量特征值的引入诱发了张量谱理论的研究. 2005 年Qi [1] 与Lim [2] 分别给出了高阶张量特征值的定义. 随后, Qi 的定义被应用到高阶弥散张量成像中.下面将简单回顾张量的各种特征值的

定义. 为简单起见, 记所有 m 阶 n 维实张量组成的空间为$T_{m,n}$, 记其中所有对称实张量组成的空间为$S_{m,n}$, 记集合 $\{1,\ldots,n\}$ 为 $[n]$, 记$\Re^n$, $\mathbf{C}^n$ 分别为n 维实向量空间和n 维复向量空间.

定义2.1 设$\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$, 若存在$\lambda\in\mathbf{C}$ 以及非零向量$\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n$ 使得

$$\left(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}\right)_i:=\sum_{i_2,\ldots,i_m\in[n]}a_{ii_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}=\lambda x_i^{m-1},\quad\forall\ i=1,\cdots,n. \tag{2.1}$$

则称λ 为$\mathcal{A}$ 的一个特征值, 称$\mathbf{x}$ 称为张量$\mathcal{A}$ 关于特征值λ 的一个特征向量. 若存在 $\lambda\in\Re$ 及非零的实向量$\mathbf{x}\in\Re^n$ 使得(2.1) 成立, 则称λ 为$\mathcal{A}$ 的一个H-特征值, 称$\mathbf{x}$ 为相应的H-特征向量.

定义2.2 设$\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$, 若存在$\lambda\in\mathbf{C}$ 以及非零向量$\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n$ 使得

$$\begin{cases}\left(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}\right)_i=\lambda x_i,\quad\forall\ i=1,\cdots,n;\\ x^\top x=1,\end{cases} \tag{2.2}$$

则称λ 为$\mathcal{A}$ 的一个E-特征值, 称 $\mathbf{x}$ 为张量$\mathcal{A}$ 关于特征值λ 的一个E-特征向量. 若存在$\lambda\in\Re$ 及非零的实向量$\mathbf{x}\in\Re^n$ 使得(2.2)成立, 则称λ 为$\mathcal{A}$ 的一个Z-特征值, 称$\mathbf{x}$ 为相应的Z-特征向量.

上述两类特征值的定义在矩阵情形下是等价的, 而在高阶张量情形下则各具千秋. H-特征值是通过齐次多项式定义出来的, 因而可以借助特征多项式理论以及代数几何的知识来进行张量谱分析 [14], 如张量的谱半径、张量特征值的代数重数、张量的迹算子及行列式等 [1]. 而Z-特征值则具有正交不变性, 在物理学、力学、数据挖掘等应用领域更具实用性, 如医学成像中的高阶弥散张量的Z-特征值及其Z-特征向量反应了各向异性的弥散系数及可能的纤维走向等 [3,15]; 又如高维数据分析中所蕴含的张量秩一逼近问题大都是在Z-特征值及Z-特征向量意义下进行求解的 [16]. 关于H-特征值与Z-特征值的更多性质与应用可以参考 [1,5,16,17]等. 事实上, 根据实际问题的需求, 张量还存在多种不同的特征值定义, 如D-特征值 [18]、M-特征值 [19]、U-特征值 [20] 以及广义特征值 [21]等.

半正定张量的特征值具有如下重要的非负性 [1].

定理2.1 设$\mathcal{A}\in T_{m,n}$, $m\geqslant 2$ 为任一偶数. 若$\mathcal{A}$ 是半正定(正定)的, 则$\mathcal{A}$ 不存在负(非正) 的H-(或Z-) 特征值. 进一步, 若$\mathcal{A}$ 是对称张量, 则$\mathcal{A}$ 一定存在H-(或Z-)特征值, 且$\mathcal{A}$ 是半正定(正定)张量当且仅当$\mathcal{A}$ 的所有H- (或Z-) 特征值是非负(严格大于零)的.

张量的半正定性判定与多项式的非负性判定是等价的, 因此关于半正定张量的判定变得尤为重要. 然而, 正如张量的其他很多问题一样, 这一判定问题一般来说是NP-hard [9]. 关于张量半正定性的判定一般从两个主要方向开展研究: 一是针对一般的对称张量,* 利用定理2.1 中所述的特征值的性质, 通过数值方法计算最小H-或Z-特征值来进行判定; 另一个是针对特殊张量, 寻求可以直接验证或者多项式时间可判定的半正定结构张量.

随着非负矩阵的Perron-Frobenius 定理成功推广到非负张量(即张量中的所有元素均为非负实数) [4–6,22], 针对非负张量及其推广形式(如弱非负张量、弱正张量等) 的最大特征值(谱半径)的计算涌现出一系列文献 [7,23–28]. 由于判定张量的半正定性需要验证最小H-(或Z-)特征值的非负性, 上述算法大多无法直接用于这一判定. 针对低维低阶的张量, Mathematica 软件以及Maple 软件提供了相应的工具进行求解, 然而随着张量维数和阶数的增加而导致计算量剧增, 该类软件已经远远无法满足我们实现有效判定的需求. 考虑到偶数阶对称张量的最小H-特征值与最小Z-特征值的求解可以转化为如

*若$\mathcal{A}$ 为非对称张量, 定义对称化算子$sym(\cdot)$ 使得$sym(\mathcal{A})$ 为对称张量且对任意$\mathbf{x}\in\Re^n$, $\mathcal{A}\mathbf{x}^m=sym(\mathcal{A})\mathbf{x}^m$. 显然$sym(\mathcal{A})$ 的半正定性与$\mathcal{A}$ 的半正定性等价.

下两类约束多项式优化问题:

$$\min_{\mathbf{x}\in\Re^n} \mathcal{A}\mathbf{x}^m,\ \text{s.t.} \sum_{i\in[n]} x_i^m = 1, \tag{2.3}$$

与

$$\min_{\mathbf{x}\in\Re^n} \mathcal{A}\mathbf{x}^m,\ \text{s.t.} \sum_{i\in[n]} x_i^2 = 1. \tag{2.4}$$

相应的KKT点对即为我们需要的最小H-特征值与最小Z-特征值及其相应的H-特征向量与Z- 特征向量. 注意到上述两个优化问题实际上是特殊的非线性规划问题, 因此可以借助非线性规划的理论与算法来进行求解. 例如, Hao et al. [29, 30] 利用子空间投影算法及其信赖域算法求解问题(2.4) 来获得对称张量$\mathcal{A}$ 的最小Z-特征值. 此外, 借助正则化技术, Han [31] 将特征值对应的约束优化问题转化为无约束优化问题来求解弱对称张量的极大与极小特征值. 考虑在某些实际问题中第二大实特征值或者其它非极值实特征值也可能反应出相应实际问题的信息或者物理意义, 求解张量所有实特征值的算法应运而生. 例如Cui et al. [32] 提出的基于半定松弛的实对称张量所有特征值求解算法, 由Zhang et al. [33] 推广而来的求解非对称张量的所有实特征值的算法, 以及Chen et al. [34] 的同伦算法等. 这些方法均可以用于近似乃至精确判定张量的半正定性.

3 半正定结构张量

偶数阶对称张量的半正定性可以通过其最小H-特征值或者最小Z- 特征值的非负性进行有效判定. 然而对于规模较大的张量而言, 已有的各类求解张量特征值的计算方法工作量往往很大, 且存在求解精度方面的问题, 无法满足快速、精确判定的需求. 考虑到实际问题中所涉及到的张量往往具有其特殊的结构特征, 这里我们将介绍几类重要的半正定结构张量. 作为半正定张量的特例, 这些结构张量包括容易验证其半正定性的对称对角占优张量、强Hankel 张量、正Cauchy-张量、对称B_0-张量、循环B_0-张量、循环对角占优张量等, 以及可以通过计算进行近似判别的对称M-张量、SOS 张量等, 还包括具有重要应用背景而比较难以验证的双非负张量、完全正张量等.

3.1 容易验证的半正定结构张量

3.1.1 对角占优张量

对角占优张量是对角占优矩阵在高阶张量上的一个自然推广, 其定义如下.

定义3.1 称张量$\mathcal{A} = (a_{i_1\cdots i_m}) \in T_{m,n}$ 为*对角占优张量*, 若对于任意$i \in [n]$ 有

$$a_{i\cdots i} \geqslant \sum_{i_2,\cdots,i_m\in[n]} |a_{ii_2\cdots i_m}| - a_{i\cdots i}; \tag{3.1}$$

称$\mathcal{A}$ 为*严格对角占优张量*, 若对于任意$i \in [n]$, 式(3.1)中的不等号严格成立.

利用著名的Gerschgorin定理在张量中的推广形式, 可以得到对称对角占优张量的半正定性.

定理3.1 (定理6, [1]) 设λ 为张量$\mathcal{A} = (a_{i_1\cdots i_m}) \in T_{m,n}$ 的任一特征值, 则存在$i \in [n]$ 使得

$$|\lambda - a_{i\cdots i}| \leqslant \sum_{i_2,\ldots,i_m\in[n],\{i_2,\ldots,i_m\}\neq\{i,\ldots,i\}} |a_{ii_2\cdots i_m}|. \tag{3.2}$$

推论3.1 偶数阶对称(严格)对角占优张量是(正定)半正定的.

值得注意的是, 在非对称情形下, 利用Gerschgorin定理的张量形式, 对角占优矩阵仍然可以保证所有H-特征值的非负性, 但是相应张量的半正定性则不一定成立. 在对称的情形下, 对角占优张量是一类容易验证的半正定张量, 利用半正定性的这一充分条件, 我们可以得到超图谱理论中两类重要张量–Laplacian 张量与无号Laplacian 张量的半正定性.

定义3.2 设$G=(V,E)$, 其中$V=\{1,2,\dots,n\}$ 为顶点集, $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ 为边集, 且对于任意$p\in[m]$, $e_p\subset V$. 若对于任意$p\in[m]$, $|e_p|=k\geqslant 2$, 则称G 为*一致超图*, 或简称为 k-图.

显然2-图即为我们所熟知的一般图. 关于超图理论可以参考Berge 的著作 [35]. 随着张量理论的不断发展, 张量在超图中的应用逐步被挖掘出来, 基于张量刻画的超图谱理论应运而生, 而超图的Laplacian 张量与无号Laplacian 张量在其中发挥着至关重要的作用.

定义3.3 设$G=(V,E)$ 为任一给定的k-图, 其中$V=\{1,2,\dots,n\}$ 为顶点集, $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ 为边集. 若张量$\mathcal{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_k})$ 满足

$$a_{i_1i_2\cdots i_k}=\begin{cases}\frac{1}{(k-1)!}, & 若(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in E;\\ 0, & 否则.\end{cases}\tag{3.3}$$

则称$\mathcal{A}$ 为超图G 的*邻接张量*. 对于任意$i\in V$,$d(i)=|\{e_p: i\in e_p\in E\}|$ 称为顶点i 的*度*. 记$\mathcal{D}$ 为以$d(i)$ 为主对角线的对角张量, 称张量$\mathcal{D}$ 为G 的*度张量*. 称$\mathcal{L}:=\mathcal{D}-\mathcal{A}$ 为超图G 的 *Laplacian 张量*; 称$\mathcal{Q}:=\mathcal{D}+\mathcal{A}$ 为超图G 的 *无号Laplacian 张量*.

由定义可知, 一致超图中的Laplacian 张量与无号Laplacian 张量均为对角占优张量, 从而在k 为偶数时, k-图所对应的这两类张量均属于半正定张量的范畴. 这也从一定程度上体现了半正定张量在超图理论中的应用.

偶数阶对称张量情形下, 对角占优性是半正定性的一个充分而非必要的条件, 这一条件进一步被弱化和推广, 如双严格对角占优张量、准双严格对角占优张量等以及相应的正定性探讨 [36,37].

3.1.2 强 Hankel 张量

Hankel 结构广泛应用于数据分析与信号处理. 作为 Hankel 矩阵的高阶张量推广, Hankel 张量在指数数据拟合 [38–41]、多维地震道插值 [42] 等众多问题中有着重要应用. Hankel 张量的结构最早是由Papy, De Lathauwer, Van Huffel 于2005年在求解信号处理中的核心问题–谐波恢复问题中提出的三阶Hankel 张量 [38]. 关于一般的高阶Hankel 张量的定义如下.

定义3.5 设$\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$. 若存在向量$\mathbf{v}=(v_0,v_1,\dots,v_{(n-1)m})^\top$ 使得

$$a_{i_1\cdots i_m}=v_{i_1+i_2+\cdots+i_m-m},\quad \forall i_1,\dots,i_m\in[n],\tag{3.4}$$

则称$\mathcal{A}$ 为m 阶n 维 *Hankel 张量*, 相应的向量$\mathbf{v}$ 称为 Hankel 张量$\mathcal{A}$ 的*生成向量*.

显然, Hankel 张量是对称张量, 且所有m 阶n 维 Hankel 张量构成$S_{m,n}$ 空间的一个维数为$(n-1)m+1$ 的子空间. 当 Hankel 张量对应的生成向量用一个统一的函数积分来表示时, 相应的函数称为该 Hankel 张量的生成函数, 其定义如下.

定义3.6 设$\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in S_{m,n}$ 为任一给定的 Hankel 张量, 其生成向量为$\mathbf{v}=(v_0,\dots,v_{(n-1)m})^\top$. 若实值可积函数$f(t)$ 满足

$$v_k=\int_{-\infty}^{+\infty}t^kf(t)dt,\quad \forall k=0,\dots,(n-1)m,$$

则称f 为 Hankel 张量$\mathcal{A}$ 的一个生成函数.

值得一提的是, 上述定义中的f 同样可以生成一个 Hankel 矩阵(即$m=2$). 由 Hankel 矩阵理论可知, 这样的生成函数f 总是存在的. 此外, 从定义3.5、定义3.6均可以看出, 同一生成向量或者同一生成函数可以生成阶数与维数不同的高阶 Hankel 张量甚至是 Hankel 矩阵, 只需要相应的阶数 m 与维数n 满足一定的关系. 利用这一发现, Qi [44] 引入了强 Hankel 张量的定义.

定义3.7 设$\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in S_{m,n}$ 为任一给定的 Hankel 张量, 其生成向量为 $\mathbf{v}=(v_0,\ldots,v_{(n-1)m})^\top$. 设矩阵 $A=(a_{ij})\in\Re^{\lceil\frac{(n-1)m+2}{2}\rceil\times\lceil\frac{(n-1)m+2}{2}\rceil}$ 满足对于任意 $i,j\in\{1,\ldots,\lceil\frac{(n-1)m+2}{2}\rceil\}$, $a_{ij}=v_{i+j-2}$, 当 $(n-1)m$ 是奇数时, $v_{\lceil\frac{(n-1)m+2}{2}\rceil}$ 为任一给定的实数. 称 A 为 Hankel 张量 $\mathcal{A}$ 的相关*Hankel* 矩阵. 若A 是半正定的, 则称相应的 Hankel 张量$\mathcal{A}$ 为强*Hankel* 张量.

强Hankel 张量可以通过生成函数的非负性来进行等价判定.

定理3.3 ([44]) 设$\mathcal{A}\in S_{m,n}$ 为任一给定的Hankel 张量. 则$\mathcal{A}$ 为强Hankel 张量当且仅当$\mathcal{A}$ 的生成函数为非负函数. 若$m\geqslant 2$ 为偶数, 且$\mathcal{A}$ 为强Hankel 张量, 则$\mathcal{A}$ 是半正定的.

上述定理给出了强Hankel 张量的另一等价条件. 在这一等价条件下, 可以推导出偶数阶强Hankel 张量的半正定性 [44]. 由此可见, 相同的生成向量产生的Hankel 矩阵的半正定性可以遗传到该向量生成的高阶偶数阶的Hankel 张量上. 一个很自然的问题为: 这一半正定性是否可以通过任一低阶偶数阶Hankel 张量传递到任一高阶偶数阶Hankel 张量呢? Ding et al. 在文献 [12] 中利用卷积公式分析了相应的不同阶Hankel 张量特征值的关系, 从而对这一半正定遗传性问题给出了肯定的回答.

定理3.4 ([12]) 设$m\geqslant 2$ 为偶数, $q\geqslant 2$ 为整数, 张量$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是由同一向量生成的 Hankel 张量, 其阶数分别为 m 与 qm. 记$\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 分别为张量的极大与极小H-特征值, 则有

$$\lambda_{\min}(\mathcal{B})\geqslant\begin{cases}c_1\lambda_{\min}(\mathcal{A}), & \text{若}\mathcal{B}\text{ 是半正定的;}\\ c_2\lambda_{\min}(\mathcal{A}), & \text{其他.}\end{cases}\qquad \lambda_{\max}(\mathcal{B})\leqslant\begin{cases}c_1\lambda_{\max}(\mathcal{A}), & \text{若}\mathcal{B}\text{ 是半负定的;}\\ c_2\lambda_{\max}(\mathcal{A}), & \text{其他.}\end{cases}$$

其中$c_1=\min\limits_{\mathbf{y}\in\Re^k}\frac{\|\mathbf{y}^{*q}\|_m^m}{\|\mathbf{y}\|_m^m}$, $c_2=\max\limits_{\mathbf{y}\in\Re^k}\frac{\|\mathbf{y}^{*q}\|_m^m}{\|\mathbf{y}\|_m^m}$, $n=qk-q+1$, $\mathbf{y}^{*q}=\underbrace{\mathbf{y}*\cdots*\mathbf{y}}_{k}$ 为卷积运算, 即

$$(\mathbf{u}*\mathbf{v})_k=\sum_{j=0}^{k}u_jv_{k-j},\quad k=0,1,\ldots,n_1+n_2-2,\quad \forall\mathbf{u}\in\Re^{n_1},\forall\mathbf{v}\in\Re^{n_2}.$$

显然, 若$\mathcal{A}$ 是(正定)半正定的, 则$\mathcal{B}$ 也是(正定)半正定的.

值得注意的是, 上述半正定遗传性一般来说是无法反向进行的, 如下反例说明了这一点.

例3.1 ([44]) 令 $m=4$, $n=2$, $\mathbf{v}=(1,0,-\frac{1}{6},0,1)^\top$, 则由$\mathbf{v}$ 生成的4 阶2 维Hankel 张量$\mathcal{A}=(a_{i_1i_2i_3i_4})$ 的所有非零元素为: $a_{1111}=a_{2222}=1$, $a_{1122}=a_{1212}=a_{1221}=a_{2112}=a_{2121}=a_{2211}=-\frac{1}{6}$. 由于$v_2<0$, $\mathcal{A}$ 的生成函数必定不是非负函数. 结合定理3.3 可知$\mathcal{A}$ 不是强Hankel 张量, 因此相应的Hankel 矩阵不是半正定的, 但是对于任意$\mathbf{x}\in\Re^2$, $\mathcal{A}\mathbf{x}^4=x_1^4+x_2^4-x_1^2x_2^2\geqslant 0$, 因此$\mathcal{A}$ 是半正定张量.

Hankel 张量不仅可以由生成向量和生成函数来得到, 而且具有如下Vandermonde 分解形式.

定理3.5 ([44]) 设$\mathcal{A}\in S_{m,n}$ 为任一对称张量, 则$\mathcal{A}$ 是 Hankel 张量当且仅当 $\mathcal{A}$ 具有 Vandermonde 分解, 即存在向量 $\mathbf{u}_k:=(1,u_k,\ldots,u_k^{n-1})^\top$, 实数 $\alpha_k\neq 0$, $k=1,\ldots,r$, 使得$\mathcal{A}=\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k(\mathbf{u}_k)^m$.

利用 Hankel 张量的 Vandermonde 分解形式, 容易得到半正定性的如下充分条件.

命题3.1　设$m \geqslant 2$ 为偶数, $\mathcal{A}=\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k\left(\mathbf{u}_k\right)^m \in S_{m,n}$ 为一 Hankel 张量且对任意 $k\in[r]$, $\alpha_k>0$, 则$\mathcal{A}$ 是半正定的.

在文献 [44] 中, 称具有全正系数的Vandermonde 分解的张量为*完全Hankel 张量*. 易知, 偶数阶完全Hankel 张量是半正定张量. 关于Vandermonde 分解的更多性质可以参见文献 [45]. 由前面的叙述可知, 在偶数阶情形下, 强Hankel 张量与完全Hankel 张量均是半正定的. 事实上, 完全Hankel 张量是强Hankel 张量的一种特例, 这一关系首先由Li et al. 在 [46] 中证明得到, 并进一步由Ding et al. [12] 通过增广Vandermonde 分解进行了细致刻画.

定理3.6　([12]) 设$\mathcal{A}\in S_{m,n}$ 为任一给定的Hankel 张量, 则$\mathcal{A}$ 是强Hankel 张量当且仅当$\mathcal{A}$ 具有如下分解形式:

$$\mathcal{A}=\sum_{k=1}^{r-1}\alpha_k\left(\mathbf{u}_k\right)^m+\alpha_r\mathbf{e}_n^m,\ \alpha_k>0,\forall k\in[r-1],\ \alpha_r\geqslant 0,\ \mathbf{u}_k=(1,u_k,\ldots,u_k^{n-1})^\top, \tag{3.5}$$

其中$\mathbf{e}_n:=(0,\ldots,0,1)^\top\in\Re^n$.

上述定理中的式(3.5) 称为 Hankel 张量$\mathcal{A}$ 的*增广 Vandermonde 分解*. 值得一提的是, 强 Hankel 张量可以通过相应的 Hankel 矩阵的半正定性来进行有效地判定, 但是作为其特例的完全 Hankel 张量则需要借助半定规划来进行判定(见3.2.2小节的SOS 张量). 强 Hankel 张量中还有一类特例称为*广义反循环张量*, 其半正定性也是容易判定的, 详见 [47]. 关于 Hankel 张量的更多性质及其相关计算参见文献 [12,41,43–45,48].

3.1.3　正Cauchy 张量

Cauchy 矩阵是一类重要的结构矩阵, 基于 Cauchy 矩阵及其各种推广形式的矩阵向量乘积的快速算法在算法设计中发挥着至关重要的作用 [50–52]. 2015年, Chen 与 Qi [53] 将这一特殊结构矩阵推广到高阶张量中, 得到相应的 Cauchy 张量, 并由此得到了一类新的容易验证的半正定张量.

定义3.8　设$\mathbf{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)^\top\in\Re^n$ 且$c_{i_1}+c_{i_2}+\cdots+c_{i_m}\neq 0$, 对于任意$i_j\in[n]$, $j\in[m]$. 若张量$\mathcal{C}=(c_{i_1i_2\cdots i_m})\in S_{m,n}$ 满足: 对任意 $i_j\in[n]$, $j\in[m]$, $c_{i_1i_2\cdots i_m}=\frac{1}{c_{i_1}+c_{i_2}+\cdots+c_{i_m}}$, 则称$\mathcal{C}$ 为m 阶n 维*对称Cauchy 张量*, 称$\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$ 为Cauchy 张量$\mathcal{C}$ 的*生成向量*.

在上述定义中, 当相应的生成向量$\mathbf{c}$ 满足一定的条件时, 可以得到如下两类与Cauchy 张量密切相关的张量: (a) 若生成张量$\mathbf{c}$ 满足: 当$i_1+i_2+\cdots+i_m=j_1+j_2+\cdots+j_m$ 时有 $\sum\limits_{k=1}^{m}c_{i_k}=\sum\limits_{k=1}^{m}c_{j_k}$, 则相应的 Cauchy 张量 $\mathcal{C}$ 为 Hankel 张量; (b) 若生成张量 $\mathbf{c}$ 满足: 对任意 $i\in[n]$, $c_i=i-1+\frac{1}{m}$, 则相应的Cauchy 张量称为 *Hilbert 张量* [54].

Cauchy 张量的半正定性可以通过其生成张量来进行判定.

定理3.7　设$\mathcal{C}\in S_{m,n}$ 为任一给定的Cauchy 张量, $\mathbf{c}\in\Re^n$ 为相应的生成向量, $m\geqslant 2$ 为偶数.则

(a) $\mathcal{C}$ 是半正定的当且仅当$\mathbf{c}>0$;

(b) $\mathcal{C}$ 是正定的当且仅当$\mathbf{c}>0$ 且其分量互不相同.

在矩阵情形下, Fiedler [55] 指出若生成向量是正向量且其分量各异, 则相应的对称 Cauchy 矩阵是正定矩阵. 上述定理进一步说明这一条件是充分且必要的, 并且对高阶张量情形同样适用. 此外, 结合 Hilbert 张量的定义不难得到如下推论.

推论3.3　([54]) 偶数阶 Hilbert 张量是正定张量.

3.1.4 B_0-张量

B_0-(B-)张量是 B_0-(B-)矩阵的张量推广. 偶数阶 B_0-(B-)张量是一类容易验证的半正定(正定)张量.

定义3.9 称张量 $\mathcal{B}=(b_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$ 为B-张量, 若对任意$i\in[n]$, 有$\sum_{i_2,\ldots,i_m\in[n]} b_{ii_2\cdots i_m}>0$ 且

$$\frac{1}{n^{m-1}}\left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n} b_{ii_2i_3\cdots i_m}\right)>b_{ij_2j_3\cdots j_m}\quad \forall (j_2,j_3,\ldots,j_m)\neq(i,i,\ldots,i). \tag{3.6}$$

称张量$\mathcal{B}$ 为B_0-张量, 若对于任意$i\in[n]$, 有$\sum_{i_2,\ldots,i_m\in[n]} b_{ii_2i_3\cdots i_m}\geqslant 0$ 且

$$\frac{1}{n^{m-1}}\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m\in[n]} b_{ii_2i_3\cdots i_m}\right)\geqslant b_{ij_2j_3\cdots j_m}\quad \forall (j_2,j_3,\ldots,j_m)\neq(i,i,\ldots,i). \tag{3.7}$$

在文献 [11]中, Qi 与Song 证明了偶数阶对称B_0-(B-)的半正定性(正定性), 其核心理论为如下分解形式. 为方便起见,我们引入如下记号. 对于任意张量$\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$, 记$\mathcal{A}_r^J=(\bar{a}_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$ 为$\mathcal{A}$ 的一个主子张量, 其中, $\bar{a}_{i_1\cdots i_m}=\begin{cases} a_{i_1\cdots i_m}, & \text{若} i_1,\ldots,i_m\in J\subseteq[n];\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 且$|J|=r$. 特别地, $\mathcal{E}^{J_k}$ 表示全1 张量的一个主子张量, 并称为**部分全1 张量** [11]. 显然, 偶数阶部分全1 张量是对称半正定张量.

定理3.8 设张量$\mathcal{B}=(b_{i_1\cdots i_m})\in S_{m,n}$ 为任一给定的对称B_0- 张量. 则$\mathcal{B}$ 要么是一个对角占优的对称M-张量(详见随后的3.2.1节), 要么具有分解形式:

$$\mathcal{B}=\mathcal{M}+\sum_{k=1}^{s} h_k\mathcal{E}^{J_k}, \tag{3.8}$$

其中, $\mathcal{M}$ 为某一对角占优对称M-张量, s 为某一正整数, $h_k>0$, $J_k\subset[n]$, $k\in[s]$, $J_k\cap J_l=\emptyset$, 对于$k\neq l,k$, $l=1,\ldots,s$ 当$s>1$. 若$\mathcal{B}$ 是对称B-张量, 则$\mathcal{B}$ 要么是一个严格对角占优对称M-张量, 要么具有分解形式(3.8), 其中$\mathcal{M}$ 为某一严格对角占优对称M-张量.

结合偶数阶情形下对角占优张量与部分全1 张量的半正定性, 利用半正定张量的可加性及其上述定理,不难得到如下结论.

推论3.4 偶数阶对称B_0-(B-)张量是半正定(正定)张量.

上述分解定理也被推广到满足一定条件的非对称B_0-(B-) 张量的情形 [56]. 此外, 与B_0-矩阵类似, B_0-张量也被进一步推广得到相应的双B_0-张量、拟B_0-张量、MB_0-张量等, 详见文献 [36, 57] 等.

3.1.5 特殊的非对称半正定张量

前面所叙述的结构张量在偶数阶对称情形下均是容易判定的半正定张量. 然后, 与半正定张量一样, 上述结构张量, 除Hankel 张量与Cauchy 张量外, 均不局限于对称张量空间$S_{m,n}$, 而是定义在实张量空间$T_{m,n}$. 在非对称情形下, 相应的半正定性是否还成立呢? 答案是否定的. 例如, 非对称的B_0-张量、非对称的对角占优张量都有可能不再是半正定张量. 值得庆幸的是, 由于非对称张量为半正定张量当且仅当其对称化张量是半正定的, 那些在对称化算子下仍能保持半正定结构的非对称张量显然也是半正定的. 此类结构包括循环B_0-张量和循环对角占优张量.

定义3.10 若$\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$ 满足对于任意i_k, $j_k\in[n]$, $j_k=i_k+1 \mod (n)$, $k\in[m]$ 有$a_{i_1\cdots i_m}=a_{j_1\cdots j_m}$, 则称$\mathcal{A}$ 为m 阶n 维的**循环张量**.

循环张量在随机过程与超图谱理论中均有应用 [58]. 利用循环B_0-张量以及循环对角占优张量在对称化算子$sym(\cdot)$ 下具有结构不变性,不难得到如下定理.

定理3.9 ([58, 推论1,定理4.2]) 偶数阶循环B_0-(B-)张量是半正定(正定)的; 偶数阶循环对角占优(严格对角占优)张量是半正定(正定)的.

3.2 可以验证的半正定结构张量

本节将介绍几类可以通过迭代算法进行验证的重要半正定结构张量, 包括M-张量以及SOS 张量.

3.2.1 M-张量

M-张量是 M-矩阵在高阶张量上的一个自然推广. M-矩阵作为一类特殊的半正定矩阵, 具有正稳定性、逆正性等一系列良好性质, 并被广泛应用于计算数学、图论、数学物理、数理经济与无线通信等多个领域 [13]. 受此启发, Zhang et al. 在文献 [59]中首次将 M-矩阵推广到高阶 M-张量, 并细致探讨了 M-张量特征值的性质. 该文中给出的M- 张量所有特征值实部非负这一重要性质告诉我们所有偶数阶对称 M-张量必定是半正定的. 此外, Ding et al. 在文献 [60] 中关于 M-张量的半正定、半非负性、单调性等其他性质的探讨. 随后, He 与Huang 在文献 [61] 中对 M-张量特征值的上下界进行了探讨, 并给出了M-张量的Ky Fan 定理. 下面将简单回顾 M-张量的基本概念与半正定性.

定义3.11 (定义3.1, [59]) 称张量 $\mathcal{A} \in T_{m,n}$ 为 M-张量, 若存在一个非负张量 $\mathcal{B} \in T_{m,n}$ 与一个正实数 $\eta \geqslant \rho(\mathcal{B})$ 使得 $\mathcal{A} = \eta\mathcal{I} - \mathcal{B}$, 其中, $\rho(\mathcal{B})$ 为 $\mathcal{B}$ 的谱半径, $\mathcal{I}$ 为单位张量(主对角线全为1 的对角张量). 进一步, 若 $\eta > \rho(\mathcal{B})$, 则称 $\mathcal{A}$ 为强 M-张量.

定理3.10 (定理3.3, [59]) 设 $\mathcal{A} \in T_{m,n}$, 记 $\sigma(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的所有特征值构成的集合. 对于任意$\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, 记$Re\lambda$ 为λ 的实部. 若$\mathcal{A}$ 是M-张量, 则 $\min\limits_{\lambda\in\sigma(\mathcal{A})} Re\lambda$ 是$\mathcal{A}$ 的一个非负H^+-特征值†; 若$\mathcal{A}$ 是强M-张量, 则 $\min\limits_{\lambda\in\sigma(\mathcal{A})} Re\lambda > 0$.

推论3.5 (定理3.5, [59]) 偶数阶对称(强) M-张量是(正定)半正定的.

由M-张量的定义可知, M-张量的所有非对角元素具有非正性, 从而属于Z-张量的范畴. Z-张量的概念由Z-矩阵推广而来, 定义为满足所有非对角元素小于等于零的张量. 在Z- 张量的前提下, M-张量具有如下充分且必要的判定条件.

定理3.11 (定理3.9, [59]) 设$\mathcal{A} \in T_{m,n}$ 为任一给定的Z-张量,则

(a) $\mathcal{A}$ 是M-张量当且仅当 $\min\limits_{\lambda\in\sigma(\mathcal{A})} Re\lambda \geqslant 0$;

(b) $\mathcal{A}$ 是强M-张量当且仅当 $\min\limits_{\lambda\in\sigma(\mathcal{A})} Re\lambda > 0$.

利用上述定理不难得到如下等价性.

推论3.6 设$\mathcal{A} \in S_{m,n}$ 为任一给定的对称Z-张量, $m \geqslant 2$ 为任一给定的偶数, 则

(a) $\mathcal{A}$ 是M-张量当且仅当$\mathcal{A}$ 是半正定的;

(b) $\mathcal{A}$ 是强M-张量当且仅当$\mathcal{A}$ 是正定的.

综上可知, 关于对称 Z-张量这一特殊的结构张量, 其半正定性(正定性)的判定等价于对 M- 张量的判定. 结合 M-张量的定义及其对称半正定张量的谱性质, 只需要计算出相应的非负张量的最大特征值就能进行半正定性的判定, 相应的迭代算法见文献 [59]. 此外, 文献 [60] 所探讨的如下性质也能作为判定张量半正定性(正定性)的依据.

† H^+-特征值是指该H-特征值存在一个相应的非负实特征向量.

定理3.12 (定理16, [60]) 设 $\mathcal{A} \in S_{m,n}$ 为任一给定的对称 Z-张量. 若 $\exists \mathbf{x} > 0$ 使得 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} \geqslant 0$, 则 $\mathcal{A}$ 是 M-张量.

满足上述定理中的条件"$\exists \mathbf{x} > 0$ 使得 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} \geqslant 0$" 的张量称为*半非负张量*. 该定理的条件是 M-张量的一个充分而非必要的条件, 文献 [60] 中给出如下反例来说明这一非必要性.

例3.2 设$\mathcal{B} = (b_{i_1\cdots i_4}) \in T_{4,2}$ 满足$b_{1111} = 2$, $b_{1122} = b_{2222} = 1$, 其他元素均为零. 利用H-特征值的定义可知 $\mathcal{B}$ 的 H-特征值为 1 与 2. 由非负张量的 Perron-Frobenius 定理可知, $\rho(\mathcal{B}) = 2$. 令$\mathcal{A} = 2\mathcal{I} - \mathcal{B}$, 由 M-张量的定义可知 $\mathcal{A}$ 是一M-张量. 注意到对于任意正向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$, $\left(\mathcal{A}\mathbf{x}^3\right)_1 = -x_1x_2^2 < 0$, $\left(\mathcal{A}\mathbf{x}^3\right)_2 = x_2^3 > 0$. 因此 $\mathcal{A}$ 不是半非负张量.

对于对称 Z-张量, 定理3.12中的半非负性是充分且必要的.

推论3.7 (命题17, [60]) 设 $\mathcal{A}$ 为任一对称 Z-张量, 则 $\mathcal{A}$ 是 M-张量当且仅当 $\mathcal{A}$ 是半非负张量.

关于对称强 M-张量, Ding et al. 在文献 [60] 中给出了更多等价条件, 那些条件均可作判定对称 Z-张量正定性的有利工具. 值得注意的是, 上述判别Z-张量为半正定张量的条件均是在对称张量空间中进行探讨的, 而在非对称情形下则不然. 例如, 矩阵$A = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是 M-矩阵. 但是 $(2,3)A(2,3)^\top = -2$, 因此 A 不是半正定的. 在一般张量情形下, 导致 M-张量$\mathcal{A} = \eta\mathcal{I} - \mathcal{B}$ 出现这一现象的原因是: 在对非负张量 $\mathcal{B}$ 实施对称化时,

$$\rho(sym(\mathcal{B})) = \max\{sym(\mathcal{B})\mathbf{x}^m : \sum_{i\in[n]} x_i^m = 1, \mathbf{x} \in \Re^n\} = \max\{\mathcal{B}\mathbf{x}^m : \sum_{i\in[n]} x_i^m = 1, \mathbf{x} \in \Re^n\} \geqslant \rho(\mathcal{B}).$$

M-张量被进一步推广到 H-张量 [60]. 我们知道, H- 矩阵是矩阵论中的一类重要矩阵, 且应用于线性互补问题、线性方程组的迭代算法等多个方面, 并在控制论、电力系统、经济数学、弹性力学等众多领域有着广泛应用, 是一类实用性很强的结构矩阵. H-张量是 H- 矩阵在高阶张量情形下的一种自然推广, 且包含 M-张量作为其特例.

定义3.12 设 $\mathcal{A} = (a_{i_1\cdots i_m}) \in T_{m,n}$. 称 $\mathcal{M} = (m_{i_1\cdots i_m}) \in T_{m,n}$ 为 $\mathcal{A}$ 的*比较张量*, 若

$$m_{i_1\cdots i_m} = \begin{cases} |a_{i_1\cdots i_m}|, & \text{若} i_1 = \cdots = i_m; \\ -|a_{i_1\cdots i_m}|, & \text{其他}. \end{cases}$$

称 $\mathcal{A}$ 为*H-张量*若 $\mathcal{A}$ 的比较张量是 M-张量; 称 $\mathcal{A}$ 为*强H-张量*, 若 $\mathcal{A}$ 的比较张量是强M-张量‡.

定理3.13 ([62,63]) 设 $\mathcal{A} = (a_{i_1\cdots i_m}) \in S_{m,n}$, $m \geqslant 2$ 为偶数. 若 $\mathcal{A}$ 为 H-张量且对于任意 $i \in [n]$, $a_{i\cdots i} \geqslant 0$, 则 $\mathcal{A}$ 是半正定的; 若 $\mathcal{A}$ 为强 H-张量且对于任意 $i \in [n]$, $a_{i\cdots i} > 0$, 则 $\mathcal{A}$ 是正定的.

关于H-张量的更多性质, 可以阅读文献 [60,62–67].

3.2.2 SOS 张量

SOS 多项式是多项式理论与多项式优化的一个重要概念 [68–72], 它是指可以分解成有限多个实系数齐次多项式平方和的实系数偶数阶齐次多项式. 结合齐次多项式系数与对称张量的一一对应关系, SOS 多项式对应的系数张量称为*SOS 张量* [73,74]. SOS 张量显然是对称半正定张量, 且可通过求解半定规划实现多项式时间的有效判定, 详见文献 [71, 72]. 然而, 并非所有的对称半正定张量都有SOS分解形式. 早在1888年, Hilbert [68] 就已经证明了非负多项式与SOS多项式的等价性只有在如下三种情

‡文献 [60]中使用的是*非奇异M- 张量*以及*非奇异H-张量*, 而其他文献中将"非奇异"改为了"强".

形下才能获得：1) $n=2$; 2) $m=2$; 3) $m=4$, $n=3$. 用张量的语言来叙述即为：m 阶n 维对称张量的半正定性与 SOS 性只有在上述三种情况下才能等价. 这一性质与 Hilbert 在1900年8月巴黎国际数学家代表大会上提出的 23 个重要数学问题中的第 17 个问题密切相关. 值得一提的是, Hilbert 并没有提出显示的实例来验证他的结果. 直到1967年, Motzkin [75] 给出了如下著名的六阶三维非负非 SOS 多项式:

$$f_M(\mathbf{x}) = x_3^6 + x_1^2x_2^4 + x_1^4x_2^2 - 3x_1^2x_2^2x_3^2.$$

之后, Choi 与 Lam [76] 给出了如下两个低阶低维的非负非 SOS 多项式：

$$f_{CL1}(\mathbf{x}) = x_4^4 + x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 - 4x_1x_2x_3x_4,$$

$$f_{CL2}(\mathbf{x}) = x_1^4x_2^2 + x_2^4x_3^2 + x_3^4x_1^2 - 3x_1^2x_2^2x_3^2.$$

Chesi [77] 将非负非 SOS 的多项式简称 PNS 多项式. 因此, 相应的系数对称张量被称为 PNS 张量 [46,48,49]. 由于 SOS 张量是多项式时间可判定的, 我们可以通过判定张量的 SOS 性质来辅助其半正定性的判定.特别地, 对于某些特殊的结构张量而言, 若不存在 PNS 这一性质(称为*PNS-free* 性质, 见 [46,48,49]), 则其半正定的判定与 SOS 性质的判定是等价的. 这一思想继而引发了关于结构张量的 PNS-free 性质的探讨. 例如, Chen et al. 在文献 [78] 中证明了在偶数阶对称情形下, 正 Cauchy 张量, (弱)对角占优张量、B_0- 张量、双B_0-张量, 拟双B_0-张量、MB_0- 张量、主对角元非负的H-张量、半正定的推广Z-张量等均为SOS 张量, 即相应的PNS-free 性质是成立的. 针对Hankel 张量, 我们已经知道完全 Hankel (强 Hankel) 张量具有(增广的) Vandermonde 分解, 因此是 SOS 张量, 即 PNS-free 性质是满足的. 那么对于任意偶数阶半正定 Hankel 张量, 是否也有这样一个好的性质呢? 这一问题简称为*Hilbert-Hankel* 问题, 并在文献 [46,48] 就低阶低维的情形进行了细致探讨, 而对于一般的情形尚未可知. 在文献 [49] 中, Qi et al. 就一类特殊的三维对称张量(称为三维强对称循环张量)的 PNS-free 性质进行了细致的刻画.

3.3 难验证的半正定结构张量

3.3.1 完全正张量

一个非负张量$\mathcal{A} \in S_{m,n}$ 被称为*完全正张量*, 若存在正整数 r 及非负向量 $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(r)} \in \Re^n_+$, 使得 $\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{r} \left(\mathbf{u}^{(i)}\right)^m$ [79]. 显然, 完全正张量是完全正矩阵在高阶张量上的一个自然推广. 当阶数 m 为偶数时, 完全正张量是对称半正定的. 与完全正矩阵类似, 完全正张量在多项式优化中有着重要作用. Peña et al. 在文献 [80]中指出, 带有非负约束的多项式优化问题在一定条件下可以等价转化为完全正张量的锥优化问题. 然后, 完全正张量的判定是NP-hard问题. Kolda [81] 利用带有非负约束的最小二乘模型来求解张量的完全正张量逼近问题, Fan 与 Zhou [82] 则通过矩理论与半定松弛提出了完全正张量的判定与分解的 Fan-Zhou算法. 随后, Luo 与 Qi 在 [83] 中借助完全正张量的零元素占优性质及其强占优性质, 提出了加速的 Fan-Zhou 算法. 完全正张量包含了很多特殊的结构张量作为其特例, 例如正 Cauchy 张量 [74,83]. 因此, 正 Cauchy 张量, 特别是 Hilbert 张量, 往往可以作为检验完全正张量判定算法的一个很好的算例. 关于完全正张量的更多性质可以参考文献 [79,83].

3.3.2 双非负张量

双非负张量是由 Luo 与 Qi 借助于对称张量的元素及其所有 H-特征值的双重非负性在 [83]中提出的, 是双非负矩阵的一个自然推广. 与矩阵的情形类似, 双非负张量包含了完全正张量为其特例, 并

可以作为完全正张量锥的一种松弛形式. 此外, 很多非负对称的结构张量均被证明为双非负张量, 如非负对称的广义对角占优张量、非负对称的MB_0-(B_0-, 双B_0-,拟B_0-)张量、非负的强 Hankel 张量、非负对称的 H-张量等 [83]. 在偶数阶情形下, 双非负张量实际上就是非负的对称半正定张量, 因而也是很难判定的. 值得注意的是, 双非负张量不仅在偶数阶有定义, 在奇数阶亦是如此. 例如奇数阶的一致超图对应的无号 Laplacian 张量就是一个特殊的双非负张量. 双非负张量在继承偶数阶半正定的同时, 也将半正定性类型的性质(如 H-特征值的非负性)推广到了奇数阶的情形. 由于半正定性在奇数阶只有零张量满足, 而奇数阶张量在实际问题中广泛出现. 因此, 从一定程度上来说, 双非负张量弥补了半正定张量只在偶数阶有定义的这一局限性, 这也是引入双非负张量的一个重要原因. 关于双非负张量的更多性质,请参见文献 [83].

4 对称半正定张量锥与空间张量锥规划

将性质与结构相同的元素构成的集合作为研究的基点往往可以帮助我们更好地理解该类元素的代数性质与几何结构特征. 与半正定矩阵类似,当阶数 m 为偶数时, 所有 m 阶 n 维的对称半正定张量构成 $S_{m,n}$ 空间中的一个非空闭凸尖点锥 [73,84], 简记为 $PSD_{m,n}$, 并称其为m 阶 n 维的对称半正定张量锥. 其内部由所有 m 阶 n 维的对称正定张量构成, 简记为 $PD_{m,n}$. 由对称半正定张量锥的闭凸性以及凸集内部的定义不难得到如下代数性质.

命题4.1 设 $m \geqslant 2$ 为偶数, $n \geqslant 2$ 为任一整数. 则

(i) 若 $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r \in PSD_{m,n}$, 则对于任意 $\lambda_i, \ldots, \lambda_r \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \mathcal{A}_i \in PSD_{m,n}$;

(ii) 若张量无穷序列 $\{\mathcal{A}_k\} \subset PSD_{m,n}$ 且 $\lim_{k\to+\infty} \mathcal{A}_k = \bar{\mathcal{A}}$, 则 $\bar{\mathcal{A}} \in PSD_{m,n}$;

(iii) 若 $\mathcal{A} \in PD_{m,n}$, 则对于任意 $\mathcal{B} \in S_{m,n}$, 存在 $\tau \geqslant 0$ 使得 $\mathcal{B} + \tau\mathcal{A} \in PSD_{m,n}$.

在矩阵情形下,对称半正定矩阵锥是自对偶锥. 然而对于高阶情形则不然.

定理4.1 ([73]) 设$m \geqslant 2$ 为偶数, $n \geqslant 2$ 为任一整数. 则 $PSD_{m,n}$ 的对偶锥为

$$V_{m,n} := \left\{ \sum_{i=1}^{l} \left(\mathbf{x}^{(i)}\right)^m : \mathbf{x}^{(i)} \in \Re^n, i = 1, \ldots, l \right\}$$

其中 l 代表 $S_{m,n}$ 空间的维数. 特别地, $PSD_{m,n} = V_{m,n}$ 当且仅当 $m = 2$.

事实上, 很多特殊的对称半正定结构张量往往也可以构成对称张量空间中的闭凸锥, 如对称 M-张量锥、完全共正张量锥、SOS 张量锥等等, 关于这些特殊的结构张量锥的性质及其应用可以参考文献 [73, 79, 83, 85].

众所周知, 素有“21世纪线性规划” 之称的半定规划与经典线性规划的主要区别之处在于其对称半正定矩阵锥约束. 关于半正定矩阵锥的几何与微分性质的探讨为半定规划的优化理论与算法提供了坚实且重要的理论基石. 随着锥优化理论与算法的不断发展, 半正定矩阵锥约束被逐步推广到对称锥、齐次锥、双曲锥等更为广泛的闭凸锥上. 作为半正定矩阵锥在高阶张量空间中的推广, 半正定张量锥优化问题自然而然地被提炼出来. 这类问题的模型在文献 [84] 中被正式提出. 鉴于物理与力学实际问题(如高阶弥散张量成像)中很多模型是建立在三维空间, Qi 与 Ye [84] 主要探讨了如下三维对称半正定张量锥优化问题

$$\inf\langle\mathcal{A}, \mathcal{X}\rangle, \quad \text{s.t.}\langle\mathcal{A}_i, \mathcal{X}\rangle = b_i, \ i = 1, \ldots, p, \quad \mathcal{X} \in PSD_{m,3}. \tag{4.1}$$

及其对偶问题

$$\sup\langle b, \mathbf{y}\rangle, \quad \text{s.t.} \sum_{i=1}^{p} y_i \mathcal{A}_i + \mathcal{S} = \mathcal{C}, \quad \mathbf{y} \in \Re^n, \quad \mathcal{S} \in V_{m,3}. \tag{4.2}$$

并利用锥优化理论建立了上述问题的对偶理论. 囿于对称半正定张量及其对偶锥的很多代数与微分性质刻画严重不足, 关于上述锥优化问题的理论与算法还非常有限, 目前已有的处理方式主要借助多项式优化理论与半定规划, 如Hu et al. [86] 给出的序列半定规划方法等. 如何刻画张量锥的切锥、法锥等, 进而建立相应的最优性条件, 并建立快速稳定的优化算法, 是目前张量锥优化所面临的一大挑战.

值得一提的是, 与张量相关的优化问题, 除了以张量为决策变量的张量锥优化这一形式外, 还包括以张量为多重线性算子的很多特殊非线性优化或者互补问题, 如经典的齐次多项式优化问题及其新兴的张量互补问题 [87,88]等.

5 总结与展望

张量的半正定性和正定性理论已和非负张量谱理论, 超图谱理论等成为新兴的张量谱理论的重要部分. 展望未来, 有两大问题值得进一步探讨. 一类问题是关于特殊结构张量谱的计算. 由于最小 H-或 Z-特征非负性是判别偶数阶对称实张量为半正定的充要条件. 是否存在计算那些容易检验的对称半正定张量类, 如偶数阶对称B_0-张量, 偶数阶正Cauchy 张量等的最小 H- 或 Z-特征值的快速算法是值得进一步研究与探讨的. 另一类问题是关于半正定性在奇数阶张量中的推广. 目前的半正定性只能在偶数阶进行探讨. 而实际问题中往往存在很多奇数阶张量的结构, 如奇数阶一致超图, 其 Laplacian 和无号 Laplacian 张量的半正定类型的性质如何刻画. 目前存在两种半正定张量在奇数阶的推广形式. 一种推广是将没有负 H-特征值的实对称张量称为*广义半正定强量*. 该类张量在偶数阶情形与半正定张量等价. 显然, 一致超图的Laplacian 和无号Laplacian 张量, 无论是偶数阶或奇数阶, 均为广义半正定张量. 另一种推广是P_0-(P-) 张量 [85]. 即对于任意非零向量$\mathbf{x} \in \Re^n$, 存在$i \in [n]$, 使得$x_i \neq 0$, 且$x_i^{m-1}\mathcal{A}\mathbf{x}_i^{m-1}(\geqslant)(>)0$. 由定义可知$P_0$($P$-) 张量包含了广义半正定(正定)张量. 总的来说, 与矩阵理论相比, 张量理论的研究目前还很不成熟. 我们期待, 张量理论将进一步发展和找到应用, 并能和矩阵理论相互映照.

致谢 感谢审稿人的宝贵意见.

参考文献

1 Qi L. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor. J Symb Comput, 2005, 40: 1302–1324

2 Lim L. Singular values and eigenvalues of tensors: A variational approach. In: Proceedings of the 1st IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), 2005, 129–132

3 Bloy L, Verma R. On computing the underlying fiber directions from the diffusion orientation distribution function. Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention – MICCAI 2008. Springer Berlin Heidelberg, 2008, 1–8

4 Chang K C, Pearson K, Zhang T. Perron-Frobenius theorem for nonnegative tensors. Commun Math Sci, 2008, 6: 507–520

5 Yang Y, Yang Q. Further results for Perron-Frobenius Theorem for nonnegative tensors. SIAM J Matrix Anal Appl, 2010, 31: 2517–2530

6 Yang Q, Yang Y. Further results for Perron-Frobenius Theorem for nonnegative tensors II. SIAM J Matrix Anal Appl, 2011, 32: 1236–1250

7 Ng M, Qi L, Zhou G. Finding the largest eigenvalue of a nonnegative tensor. SIAM J Matrix Anal Appl, 2009, 31(3): 1090–1099
8 Bulò S R, Pelillo M. New bounds on the clique number of graphs based on spectral hypergraph theory. Learning and Intelligent Optimization. Springer Berlin Heidelberg, 2009: 45–58
9 Hillar C, Lim L. Most tensor problems are NP-hard. J ACM, 2013, 60(45): 1–39
10 Peña J M. A class of P-matrices with applications to the localization of the eigenvalues of a real matrix. SIAM J Matrix Anal Appl, 2001, 22(4): 1027–1037
11 Qi L, Song Y. An even order symmetric B tensor is positive definite. Linear Algebra Appl, 2014, 457: 303–312
12 Ding W, Qi L, Wei Y. Inheritance properties and sum-of-squares decomposition of Hankel tensors: theory and algorithms. 2015, arXiv:1505.02528
13 Berman A, Plemmons R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Classics in Appl. Math 9, SIAM, Philadelphia, 1994
14 Gelfand I M, Kapranov M, Zelevinsky A. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. Springer Science & Business Media, 2008
15 Qi L, Yu G, Wu E X. Higher order positive semidefinite diffusion tensor imaging. SIAM J Imag Sci, 2010, 3(3): 416–433
16 Qi L. The best rank-one approximation ratio of a tensor space. SIAM J Matrix Anal Appl, 2011, 32: 430–442
17 Chang K C, Pearson K, Zhang T. Some variational principles for Z-eigenvalues of nonnegative tensors. Linear Algebra Appl, 2013, 438: 4166–4182
18 Qi L, Wang Y, Wu E X. D-eigenvalues of diffusion kurtosis tensors. J Comput Applied Math, 2008, 221: 150–157
19 Qi L, Dai H, Han, D. Conditions for strong ellipticity and M-eigenvalues. Front Math China, 2009, 4: 349-364
20 Ni G, Qi L, Bai M. Geometric measure of entanglement and U-eigenvalues of tensors. SIAM J. Matrix Anal. Appl, 2014, 35: 73–87
21 Chang K, Pearson K, Zhang T. On eigenvalue problems of real symmetric tensors. J Math Anal Appl, 2009, 350: 416–422
22 Friedland S, Gaubert S, Han L. Perron-Frobenius theorem for nonnegative multilinear forms and extensions. Linear Algebra Appl, 2013, 438: 738–749
23 Liu Y, Zhou G, Ibrahim N F. An always convergent algorithm for the largest eigenvalue of an irreducible nonnegative tensor. J Comput Applied Math, 2010, 235(1): 286–292
24 Zhou G, Caccetta L, Teo K L, Wu S Y. Nonnegative polynomial optimization over unit spheres and convex programming relaxations. SIAM J Optim, 2012, 22(3): 987–1008
25 Zhou G, Qi L, Wu S Y. Efficient algorithms for computing the largest eigenvalue of a nonnegative tensor. Front Math China, 2013, 8(1): 155–168
26 Chen Z, Qi L, Yang Q, Yang Y. The solution methods for the largest eigenvalue (singular value) of nonnegative tensors and convergence analysis. Linear Algebra Appl, 2013, 439(12): 3713–3733
27 Hu S, Li G, Qi L, Song Y. Finding the maximum eigenvalue of essentially nonnegative symmetric tensors via sum of squares programming. J Optim Theory Appl, 2013, 158(3): 717–738
28 Zhang L, Qi L, Luo Z, Xu Y. The dominant eigenvalue of an essentially nonnegative tensor. Numer Linear Algebra Appl, 2013, 20(6): 929–941
29 Hao C, Cui C, Dai Y. A sequential subspace projection method for extreme Z-eigenvalues of supersymmetric tensors. Numer Linear Algebra Appl, 2015, 22: 283–298
30 Hao C, Cui C, Dai Y. A feasible trust-region method for calculating extreme Z-eigenvalues of symmetric tensors. Pacific J Optim, in press, 2015
31 Han L, An unconstrained optimization approach for finding real eigenvalues of even order symmetric tensors. Numer Algebr Control Optim, 2013, 3: 583–599
32 Cui C, Dai Y, Nie J. All real eigenvalues of symmetric tensors. SIAM J Matrix Anal Appl, 2014, 35(4): 1582–1601
33 Nie J, Zhang X. Real Eigenvalues of nonsymmetric tensors. arXiv:1503.06881, 2015
34 Chen L, Han L, Zhou L. Computing tensor eigenvalues via homotopy methods. arXiv:1501.04201, 2015
35 Berge C. Hypergraphs, Combinatorics of Finite Sets. 3rd edn., North-Holland, Amsterdam, 1989
36 Li C, Li Y. Double B-tensors and quasi-double B-tensors. Linear Algebra Appl, 2015, 466: 343–356
37 Li C, Li Y, Kong X. New eigenvalue inclusion sets for tensors. Numerical Linear Algebra Appl, 2014, 21(1): 39–50
38 Papy J M, De Lauauwer L, Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: The single-channel and multi-channel case. Numer Linear Algebra Appl, 2005, 12: 809–826
39 Boyer R, De Lathauwer L, Abed-Meraim K. Higher order tensor-based method for delayed exponential fitting. IEEE

Trans Signal Process, 2007, 55(6): 2795–2809
40 Papy J M, De Lathauwer L, Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: The decimative case. J Chemometr, 2009, 23(7-8): 341–351
41 Ding W, Qi L, Wei Y. Fast Hankel tensor-vector products and application to exponential data fitting. Numer Linear Algebra Appl, 2015, 22: 814–832
42 Trickett S, Burroughs L, Milton A. Interpolation using Hankel tensor completion. Ratio, 2013, 1(16): 16
43 Badeau R, Boyer R. Fast multilinear singular value decomposition for structured tensors. SIAM J Matrix Anal Appl, 2008, 30: 1008–1021
44 Qi L. Hankel tensors: Associated Hankel matrices and Vandermonde decomposition. Commun Math Sci, 2015, 13: 113–125
45 Xu C. Hankel tensors, Vandermonde tensors and their positivities. Linear Algebra Appl, 2016, 491: 56–72
46 Li G, Qi L, Xu Y. SOS-Hankel tensors: theory and application. 2014, arXiv:1410.6989
47 Li G, Qi L, Wang Q. Positive semi-definiteness of generalized anti-circular tensors. to appear in: Commun Math Sci, 2015
48 Chen Y, Qi L, Wang Q. Positive semi-definiteness and sum-of-squares property of fourth order four dimensional Hankel tensors. J Comput Appl Math, 2016, 302: 356–368
49 Qi L, Wang Q, Chen Y. Three dimensional strongly symmetric circulant tensors. Linear Algebra Appl, 2015, 482: 207–220
50 Finck T, Heinig G, Rost K. An inversion formula and fast algorithms for Cauchy-Vandermonde matrices. Linear Algebra Appl, 1993, 183: 179–191
51 Gohberg I, Olshevsky V. Fast algorithms with preprocessing for matrix-vector multiplication problems. J Complexity, 1994, 10(4): 411–427
52 Heinig G. Inversion of generalized Cauchy matrices and other classes of structured matrices. Linear algebra for signal processing. Springer New York, 1995: 63–81
53 Chen H, Qi L. Positive definiteness and semidefiniteness of even order symmetric Cauchy tensors. J Ind Manag Optim, 2015, 11(4): 1263–1274
54 Song Y, Qi L. Infinite and finite dimensional Hilbert tensors, Linear Algebra Appl, 2014, 451: 1–14
55 Fiedler M. Notes on Hilbert and Cauchy matrices. Linear Algebra Appl, 2010, 432(1): 351–356
56 Yuan P, You L. Some remarks on P, P_0, B and B_0 tensors. Linear Algebra Appl, 2014, 459: 511–521
57 Li C, Qi L, Li Y. MB-tensors and MB_0-tensors. Linear Algebra Appl, 2015, 484: 141–153
58 Chen Z, Qi L. Circulant tensors with applications to spectral hypergraph theory and stochastic process. J Ind Manage Optim, 2016, 12: 1227–1247
59 Zhang L, Qi L, Zhou G. M-tensors and some applications. SIAM J Matrix Anal Appl, 2014, 35(2): 437–452
60 Ding W, Qi L, Wei Y. M-tensors and nonsingular M-tensors. Linear Algebra Appl, 2013, 439: 3264–3278
61 He J, Huang T. Inequalities for M-tensors. J Inequal Appl, 2014, 2014(1): 1–9
62 Kannan M R,Shaked-Monderer N, Berman A. Some properties of strong H-tensors and general H-tensors. Linear Algebra Appl, 2015, 476: 42–55
63 Li C, Wang F, Zhao J, Zhu Y, Li Y. Criterions for the positive definiteness of real supersymmetric tensors. J Comput Appl Math, 2014, 255: 1–14
64 Wang X, Wei Y. H-tensors and nonsingular H-tensors. Front Math China, 2015, 1–19
65 Wang X, Wei Y. Bounds for eigenvalues of nonsingular H-tensor. Electron J Linear Algebra, 2015, 29(1): 3–16
66 Wang F, Sun D. New criteria for H-tensors and an application. Open Math, 2015, 13: 609–616
67 Wang Y, Zhou G, Caccetta L. Nonsingular H-tensor and its criteria, to appear in J Ind Manag Optim, 2015
68 Hilbert D. Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten. Mathe Annals, 1888, 32: 342–350
69 Shor N. Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998
70 Reznick B. Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem. Contemporary Mathematics, 2000, 253: 251–272
71 Lasserre J B. Global optimization with polynomials and the problem of moments. SIAM J Optim, 2001, 11: 796–817
72 Laurent M. Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials. Emerging Applications of Algebraic Geometry, Vol. 149 of IMA Volumes in Mathematics and its Applications, M. Putinar and S. Sullivant eds., Springer, 2009, 157–270
73 Luo Z, Qi L, Ye Y. Linear operators and positive semidefiniteness of symmetric tensor spaces. Sci China Math, 2015, 58: 197–212
74 Hu S, Li G, Qi L. A tensor analogy of Yuan's alternative theorem and polynomial optimization with sign structure. J Optim Theory Appl, 2016, 168: 446–474

75 Motzkin T S. The arithmetic-geometric inequality. In: Inequalities, O. Shisha ed., Academic Press, New York, 1967, 205–224
76 Choi M D, Lam T Y. Extremal positive semidefinite forms. Mathematische Annalen, 1977, 231: 1–18
77 Chesi G. On the gap between positive polynomials and SOS of polynomials. IEEE Trans Automat Control, 2007, 52: 1066–1072
78 Chen H, Li G, Qi L. SOS tensor decomposition: theory and applications. to appear in: Commun. Math. Sci., 2016
79 Qi L, Xu C, Xu Y. Nonnegative tensor factorization, completely positive tensors and an Hierarchically elimination algorithm. SIAM J Matrix Anal Appl, 2014, 35: 1227–1241
80 Peña J, Vera J, Zuluaga L. Completely positive reformulations for polynomial optimization. Math. Program Ser B, 2015, 151: 405–431
81 Kolda T. Numerical optimization for symmetric tensor decomposition, Math. Program Ser B, 2015, 151: 225–248
82 Fan J, Zhou A. Completely positive tensor decomposition. arXiv:1411.5149, 2014
83 Luo Z, Qi L. Doubly nonnegative tensors, completely positive tensors and applications. arXiv:1504.07806, 2015
84 Qi L, Ye Y. Space tensor conic programming. Comput Optim Appl, 2014, 59(1-2): 307–319
85 Ding W, Luo Z, Qi L. P-tensors, P_0-tensors, and tensor complementarity problem. arXiv:1507.06731, 2015
86 Hu S, Huang Z H, Qi L. Finding the extreme Z-eigenvalues of tensors via a sequential semidefinite programming method. Numer Linear Algebra Appl, 2013, 20(6): 972–984
87 Che M, Qi L, Wei Y. Positive definite tensors to nonlinear complementarity problems. J Optim Theory Appl, 2016, 168: 475–487
88 Song Y, Qi L.Tensor complementarity problem and semi-positive tensors. J Optim Theory Appl, 2015, DOI 10.1007/s10957-015-0800-2

On Positive Semidefinite Tensors

Luo Ziyan & Qi Liqun

Abstract In the era of big data, the high-order high-dimensional tensor structure has attracted more and more attentions, which further leads to the extensive study on tensor theory, computation and applications. Analogous to the matrix case, the positive semidefinite tensors, which form an important class of tensors, have played an essential role in tensor applications. This paper aims to provide a simple survey of the positive semidefiniteness of tensors and some potential research directions on tensor theory.

Keywords Positive semidefinite tensor, structured tensor, tensor eigenvalues

MSC(2010) 15A18, 15A69, 53A45

doi: 10.1360/012011-XXX