

如亚历山大大帝、奥古斯都、成吉思汗、阿育王。而有些数学家之所以具有广泛持久的魅力,原因在于数学本身。

五世纪的拜占庭学家普罗克洛斯被认为是最后一位主要的希腊哲学家,晚年一直担任雅典柏拉图学园的园长,他认为,

数学是这样一种东西:她提醒你有无形的灵魂;她赋予她所发现的真理以生命;她唤起心神,澄清智慧;她给我们的内心思想添辉;她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。

7世纪的印度天文学家兼数学家婆罗摩笈多曾以诗的语言和形式阐述印度天文学体系,他也说过,

正如太阳以其光芒使众星失色,学者也以其提出代数问题而使满座高朋逊色,若能给予解答则将使侪辈更为相形见绌。

在我看来,随着用途越来越广泛,数学已成为现代人的一个不错的职业。与此同时,在纷繁的现实世界里,数学也是一座坚固的精神堡垒,可以避免让你的头脑崩溃。从某种意义上讲,数学和政治一样都是可能性的

艺术,从事这两项工作的人都需要冒险和勇气,他们面对复杂的问题都需要依赖直觉和运气。另一方面,数学和政治也都有自身的局限,一个伟大的数学家和一个伟大的政治家在他们各自领域之外的经验和智慧都是有限的,他们对非数学和非政治的忠告的价值也是有限的,这种局限性迫使他们和大众有了距离。尽管如此,数学家和政治家都有着他们自己独特的精神世界和生活方式。

倘若要谈论伟大,帕斯卡尔在《思想录》里划分出几种不同的类型,其一是身体上、物质上的伟大,这方面伟大的代表是各种光彩显赫的事物,如太空、星辰、国王、富人、首领,这是眼睛所能看见的。其二是精神的、理智的伟大,这方面伟大的代表是那些天才人物,例如阿基米德、牛顿、高斯。他们有着他们的领域,他们的显赫,他们的胜利,他们的辉煌,他们不是用眼睛而是用精神才能被人看到。帕斯卡尔进一步指出:“一切伟大事物的光辉显赫,对于从事精神探讨的人来说,都是毫无光彩可言”。

张量研究的两点心得

祁力群(香港理工大学应用数学系)

2009年5月,我到意大利西西里岛 Erice 参加国际变分分析会议。在来意大利开会之

前,我在张量计算的几个方向已展开研究。5月14日,会议上的朋友们出去旅游了。我因

多次来过这里,许多地方已去过,因此,就忙里偷闲,在旅店安静的房间里,面对窗外的蓝天白云和地中海,将这些方面的研究写出来,整理思路,与朋友们交流心得,为自己的研究方向定位,也为进一步的研究铺阵新局,去挖掘更多的成果。

2008年12月,在香港理工大学,我组织了计算多项式优化和多重线性代数的工作会议,北京大学的张恭庆院士、斯坦福大学的叶荫宇教授、东京工学院的小岛政和教授等与会。会上张恭庆院士作了将 Perron-Frobenius 的定理从非负矩阵全面推广到非负张量的报告。加州大学伯克利分校的林力行报告了一个奇特的现象,秩为 r (r 大于1)的一般张量或对称张量集都不是闭的,而秩为 r 的非负张量集却是闭的。这引起了我和香港浸会大学吴国宝教授、澳大利亚 Curtin 科技大学周广路博士对非负张量的注意。我们撰文指出,非负张量最大特征值在多重马尔可夫链研究上是有用,其计算求解效果也非常好,不像一般或对称张量特征值计算总是 NP-Hard。(这篇文章将在 SIAM 矩阵分析杂志上发表。)今年2月,中科院数学与系统科学研究院马志明院士来访,我们讨论这可能在 PageRank 里还会有应用。我想,非负张量可能是张量研究中奇特的一块。这必然和多变量概率理论密切相关,因为概率必须是非负的。非负张量必将自成一局,是个值得研究的新分支。

从2007年开始,我和香港大学吴学奎教

授等合作,对扩散梯度张量成像技术进行了研究,在应用数学和医疗工程的学术杂志上发表了六七篇文章。磁共振扩散张量成像技术已在医疗上普遍使用。扩散张量是个二阶张量。其空间扩散系数成一个椭球球面,椭球之主轴即为主特征向量方向,恰与人体器官如脑部神经纤维走向吻合,而椭球面其它两个轴即次特征向量方向则垂直于纤维走向。但在多神经纤维交叉时,二阶张量的椭球面就无法吻合多纤维走向了。扩散梯度张量成像则是在成像公式上加了一个四阶梯度张量修正项,以弥补二阶张量之不足。张量的分量是随坐标转动而变化的,不能直接应用,只有不随坐标转动而变化的不变量,如特征值,才可用为诊疗判断参数。因为我在2005年提出了高阶张量特征值的概念,从而吴学奎教授的研究组和我建立了联系并开展了合作研究。我们将高阶张量特征值理论用于扩散梯度张量成像的研究,因为是不变量,自然具有成像参考价值。吴学奎教授是一个具有物理背景的研究者,他希望能知道梯度张量特征向量方向的物理意义。但四阶梯度张量项在这个模型中只是二阶扩散张量项的一个修正项,它的特征向量方向是不可能有其独立的物理意义的。因此,这方面的研究在2008年下半年就有点停步不前了。

今年2月,偶然在 Google 上发现我2005年高阶张量特征值的文章被另外两个医疗工程研究者引用。比较奇怪的是,为何他们不引用我们用于医疗成像的六七篇文章,却要

引用我2005年的数学文章,这有点奇怪。我因而决定和我的助手喻高航博士对医疗影像文献来个系统的研究。我们随之发现,在后扩散张量成像研究中,较多的医疗工程研究者是用一个高阶扩散张量直接代替那个二阶扩散张量。一个高阶扩散张量的扩散系数形成一个多刺的凸面。这些凸刺就可和高纤维走向吻合,而这些凸刺恰为我所提出的高阶张量的特征向量方向。这就解释了上面的疑问。

知道了这个问题的原因,但又从何处入手开展新的研究呢?在医疗工程上,所有的扩散系数必须是非负的,否则就没有意义。这意味着这些向量的特征向量是非负的,即这些张量是半正定的。工程数据总有噪音,并不能使原始数据自然产生出的张量是半正定的。对于二阶张量,如果产生了负特征值,可强迫其为0。而对于高阶张量,就没有这样明显容易的办法,于是我们提出了一个半正定扩散张量成像方法,在原有模型上加上一个半正定约束,使得产生的扩散张量无论是二阶或高阶,均为半正定的。这个约束是个凸锥约束,也可用我提出的高阶张量最小特征值函数非负来表示。由于医疗上的张量均为三维张量,最小特征值均易计算。这个模型是一个凸规划,可以计算求解。喻高航博士为这个模型进行了计算,并加上了脑部成像彩图。

在医疗成像研究上的这个发现使我很高兴。4月份,叶荫宇教授来访。我和他也进

行了讨论,叶荫宇教授指出,这是个锥线性规划。原来,凸优化的一个重大进展,就是将线性规划推广到锥线性规划,包括半正定规划和二阶锥规划。而我们这个半正定扩散张量成像模型,即是一个锥线性规划的新品种。我们将它称为空间张量规划,这里的空间张量,是指物理上实际存在的物理量。它们只有三维,因而有别于统计或数据分析中产生的高维张量。半正定空间张量是可以多项式时间判别的,半正定高维张量的判别却是NP-Hard的,这是很大的不同。

在5月13日Erice会上我作了半正定扩散张量成像和空间张量规划的报告,受到与会者的好评和兴趣。美国的Rockafellar教授又帮我解决了最小特征值函数的次微分构造问题。我随即将空间张量锥的对偶锥内点判断问题向Rockafellar教授提出。Rockafellar教授是世界上凸分析和变分分析的顶级权威。我希望他能帮助解决这个问题。锥线性规划的提出者之一Nesterov教授对我的报告自然有兴趣。而意大利的Gianessi教授等就鼓励我将空间张量规划的研究进一步深入、扩大。作为锥线性规划的一个新模型。

另一方面,我和叶荫宇教授对计算多项式的优化也在进一步研究。在5月13日的会上,我的博士生张新珍报告了她和我及叶荫宇教授一起合作的三阶多项式函数球面优化研究,这个工作也和Nesterov教授的研究密切相关。我和我的助手凌晨博士、张新珍目前正和奥地利的Bomze教授合作,研究单纯

形上的多项式优化问题。

再一方面,我和香港城市大学戴晖晖教授、南京师范大学韩德仁博士对固体力学中弹性张量椭球性的问题也在进一步深入地研究。最近,我们的一篇文章刚被“弹性”杂志接受,这也是我在固体力学的杂志上发表的第一篇文章。现在,我正和戴晖晖教授运用我们在其它领域研究中取得的技术对这个问题进行深入的研究。

回到香港,又看到一个罗马尼亚学者的文章,这篇文章探讨了我提出的高阶张量特征值的一些性质。这个学者是研究几何的,对我的工作有所呼应,是对我工作的另一个肯定。

小结这一段的研究,有两点心得:

一是应用数学研究工作者要系统地研究一个或几个应用领域中的课题,从中提出具有强烈应用背景的应用数学新方向、新课题,并作出有意义的创造性成果。这次在后扩散张量成像研究中提出半正定扩散张量成像方法,再晋升为空间张量规划,就是这样做的。

下面希望对多重马尔可夫链的研究或PageRank和固体力学弹性理论的研究也下这样的功夫。

二是应用数学研究工作者要努力找到“可处理的”(tractable)新界线,并努力将有重大应用价值的课题包含其中,而不是强攻“不可处理的”(intractable)课题,否则,研究结果将一无所得。这个“可处理的”新界线,会将人们的知识大大向前推进。Nemerovski和Nesterov将线性规划推广到锥线性规划,包括了半正定规划和二阶锥规划。我将光滑非线性方程组牛顿算法推广到半光滑非线性方程组牛顿算法,包括了非线性互补问题和变分不等式转换成的非线性方程组,都是这样的例子。原来对张量计算不加区分的研究,进展就不好。现在要将矩阵计算推广到非负张量计算和空间张量计算,这将会有重要的应用背景。

将这两点心得写出来,以后再来检验,也许对后来者会有用处。



五四时期的数理学会和数理杂志

张友余(陕西师范大学)

赵爽英(西北大学)

西方数学传入中国,经历了一个十分缓慢的长期过程。鸦片战争后速度加快,“来自

西方的数学方法在19世纪末已在中国占主导地位,中国传统数学方法和思维模式在当