

AMA1D01C Lecture Notes Set #05

《測圓海鏡》

《Sea Mirror of Circle Measurement》

By

李向榮博士 梁信謙博士

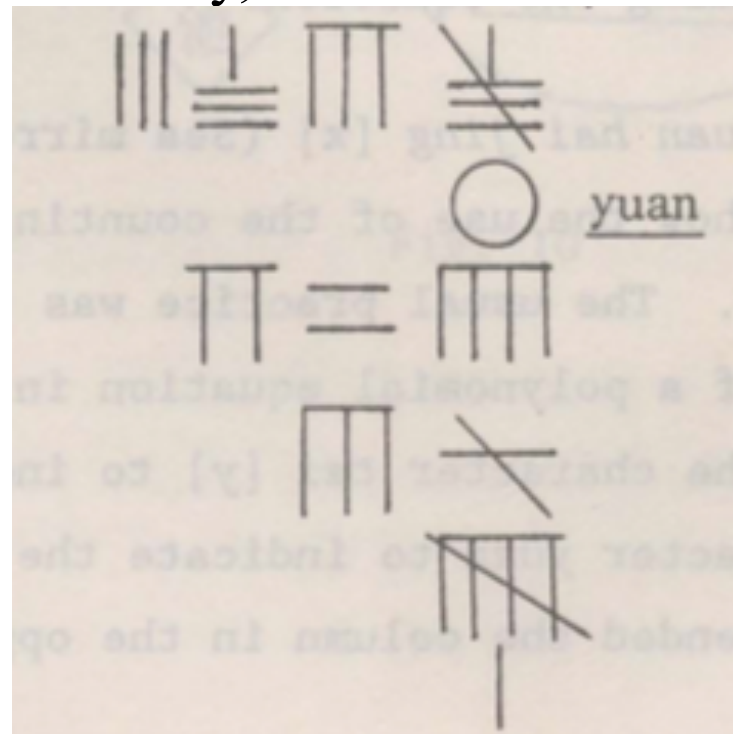
香港理工大學應用數學系

《測圓海鏡》

- 作者：金 李冶
- 成書時間約於 1248年
- 十二卷，共一百七十個問題。
- 透過「天元術」（列一元方程的方法）解決勾股容圓的幾何問題
- 早期「天元術」著作已失，僅存被引用的一些片段。據祖頤在《四元玉鑿後序》中的記載，李冶以前研究天元術的學者有北宋蔣周撰《益古集》、李文一撰《照膽》，石信道撰《鈐經》、劉汝諧撰《如積釋鎖》等書，世人才知道有天元。
- 天元術: 用「天元」代替未知數，列出方程求解。

Lam Lay Yong 藍麗蓉, “The Development of Polynomial Equations in Traditional China”, delivered at the Presidential Address at the General Meeting of The Singapore Mathematical Society, on 19 Mar 1986.

天元術



元

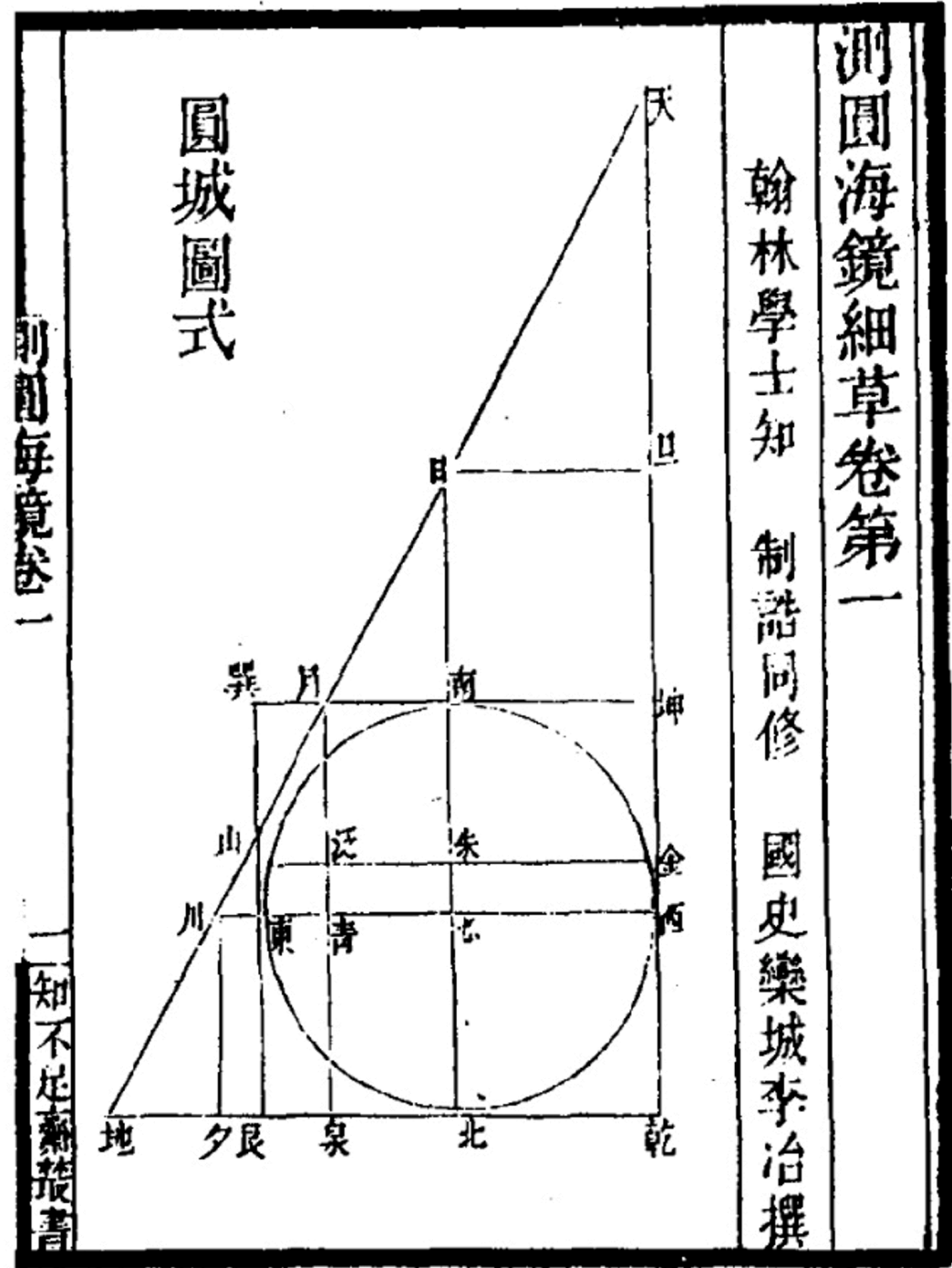
represents the equation

$$x^5 - 9x^4 - 81x^3 + 729x^2 - 3888 = 0 .$$

References

- 白尚恕、钟善基，《测圆海镜今译》 山东教育出版社，1985。
- 漢リポ Kanseki Repository <https://www.kanripo.org/text/KR3f0042/001>
- 维基文库 <https://zh.wikisource.org/zh-hant/測圓海鏡/卷01>
- 维基文库 <https://zh.wikisource.org/zh-hant/測圓海鏡/卷02>
- 維基百科 <https://zh.wikipedia.org/wiki/測圓海鏡>
- Wikiwand <http://www.wikiwand.com/zh-tw/測圓海鏡>

- 卷一：圓城圖式
- 總率名號
- 天之地為通弦，
- 天之乾為通股，
- 乾之地為通勾。
- 天之川為邊弦，
- 天之西為邊股，
- 西之川為邊勾。



總率名號

天之地為通弦

天之乾為通股

乾之地為通勾

天之川為邊弦

天之西為邊股

西之川為邊勾

日之地為底弦

日之北為底股

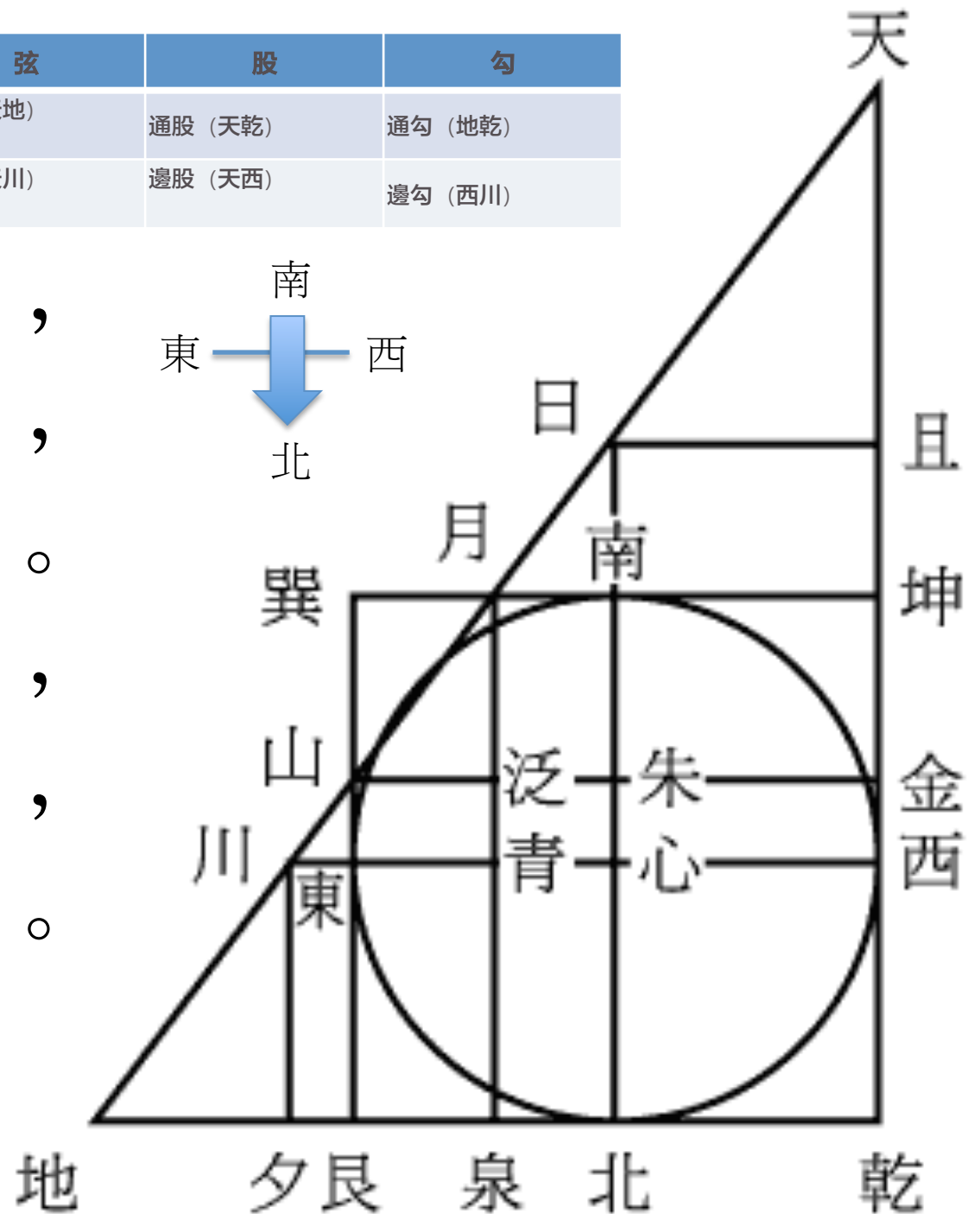
北之地為底勾

天之山為黃廣弦

天之金為股

三角形名稱	對應的三個頂點	弦	股	勾
通	天地乾	通弦 (天地)	通股 (天乾)	通勾 (地乾)
邊	天西川	邊弦 (天川)	邊股 (天西)	邊勾 (西川)

天之地為通弦，
 天之乾為通股，
 乾之地為通勾。
 天之川為邊弦，
 天之西為邊股，
 西之川為邊勾。



- 日之地為底弦，日之北為底股，北之地為底勾。
- 天之山為黃廣弦，天之金為股即股方差也，金之山為勾。
- 月之地為黃長弦，月之泉為股，泉之地為勾即勾方差也。
- 天之日為上高弦，天之旦為股，旦之日為勾。
- 日之山為下高弦，日之朱為股，朱之山為勾。
- 月之川為上平弦，月之青為股，青之川為勾。
- 川之地為下平弦，川之夕為股，夕之地為勾。
- 天之月為大差弦，天之坤為股，坤之月為勾。
- 山之地為小差弦，山之艮為股，艮之地為勾。
- 日之川為皇極弦，日之心為股，心之川為勾。
- 月之山為太虛弦，月之泛為股，泛之山為勾。

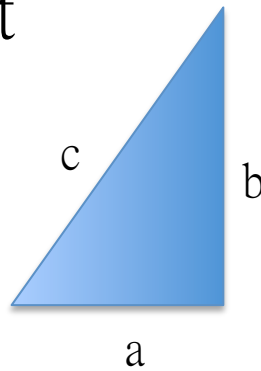
- 日之月為明弦，日之南為股，南之月為勾。
- 山之川為夷弦，山之東為股，東之川為勾。

For easy reference, let

a=勾

b=股

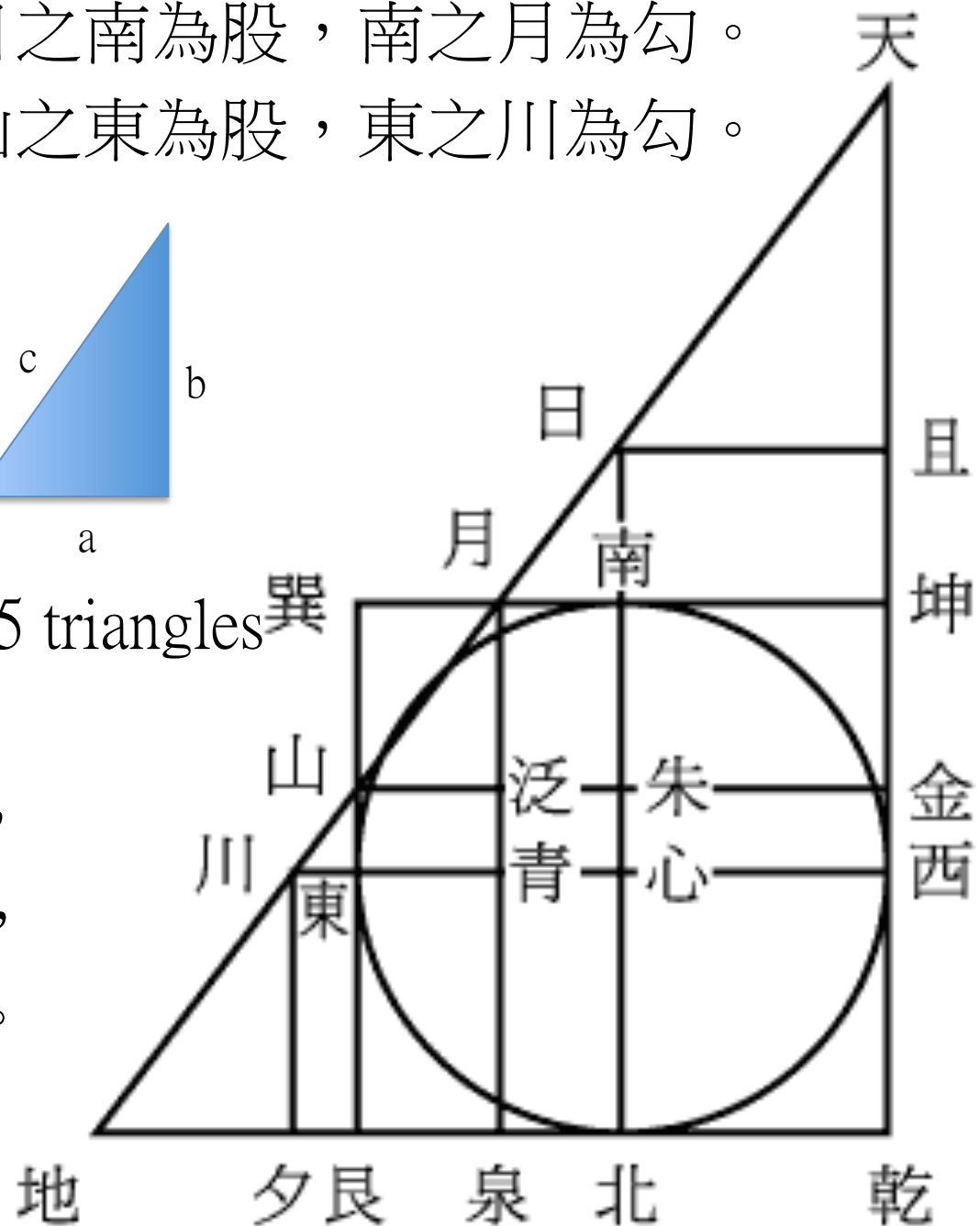
c=弦



subscripts denote the 15 triangles

e.g.

- c_1 =天之地為通弦，
- b_1 =天之乾為通股，
- a_1 =乾之地為通勾。



序號	三角形名稱	對應的三個頂點	弦 c		股 b		勾 a	
1	通	天地乾	通弦 (天地)	c_1	通股 (天乾)	b_1	通勾 (地乾)	a_1
2	邊	天西川	邊弦 (天川)	c_2	邊股 (天西)	b_2	邊勾 (西川)	a_2
3	底	日地北	底弦 (日地)	c_3	底股 (日北)	b_3	底勾 (地北)	a_3
4	黃廣	天山金	黃廣弦 (天山)	c_4	黃廣股 (天金)	b_4	黃廣勾 (山金)	a_4
5	黃長	月地泉	黃長弦 (月地)	c_5	黃長股 (月泉)	b_5	黃長勾 (地泉)	a_5
6	上高	天日旦	上高弦 (天日)	c_6	上高股 (天旦)	b_6	上高勾 (日旦)	a_6
7	下高	日山朱	下高弦 (日山)	c_7	下高股 (日朱)	b_7	下高勾 (山朱)	a_7
8	上平	月川青	上平弦 (月川)	c_8	上平股 (月青)	b_8	上平勾 (川青)	a_8
9	下平	川地夕	下平弦 (川地)	c_9	下平股 (川夕)	b_9	下平勾 (地夕)	a_9
10	大差	天月坤	大差弦 (天月)	c_{10}	大差股 (天坤)	b_{10}	大差勾 (月坤)	a_{10}
11	小差	山地艮	小差弦 (山地)	c_{11}	小差股 (山艮)	b_{11}	小差勾 (地艮)	a_{11}
12	皇極	日川心	皇極弦 (日川)	c_{12}	皇極股 (日心)	b_{12}	皇極勾 (川心)	a_{12}
13	太虛	月山泛	太虛弦 (月山)	c_{13}	太虛股 (月泛)	b_{13}	太虛勾 (山泛)	a_{13}
14	明	日月南	明弦 (日月)	c_{14}	明股 (日南)	b_{14}	明勾 (月南)	a_{14}
15	夷	山川東	夷弦 (山川)	c_{15}	夷股 (山東)	b_{15}	夷勾 (川東)	a_{15}

今問正數

- 通弦六百八十，勾三百二十，股六百。
- $c_1=680, a_1=320, b_1=600.$
- 勾股和九百二十，較二百八十。
- $b_1+a_1=920, b_1-a_1=280.$
- 勾弦和一千，較三百六十。
- $c_1+a_1=1000, c_1-a_1=360.$
- 股弦和一千二百八十，較八十。
- $c_1+b_1=1280, c_1-b_1=80.$

身之川為公

今問正數

欽定四庫全書

測圖考鏡
卷一

欽定四庫全書

測圖考鏡
卷一

通弦六百八十 勾三百二十 股六百

勾股和九百二十較二百八十

勾弦和一千較三百六十

股弦和一千二百八十較八十

弦較和九百六十較四百

弦和和一千六百較二百四十

邊弦五百四十四 勾二百五十六 股四百八十

勾股和七百三十六較二百二十四

- 弦較和九百六十，較四百。
- $c_1+(b_1-a_1)=960$, $c_1-(b_1-a_1)=400$.
- 弦和和一千六百，較二百四十。
- $(a_1+b_1)+c_1=1600$, $(a_1+b_1)-c_1=240$.

- 邊弦五百四十四，勾二百五十六，股四百八十。
- $c_2=544$, $a_2=256$, $b_2=480$.
- 勾股和七百三十六，較二百二十四。
- $b_2+a_2=736$, $b_2-a_2=224$.
- etc etc

	弦 c	勾 a	股 b	勾股和	勾股較	勾弦和	勾弦較	股弦和	股弦較	弦校和	弦校較	弦和和	弦和較
				a+b	b-a	a+c	c-a	b+c	c-b	c+(b-a)	c-(b-a)	(a+b)+c	(a+b)-c
1 通	680	320	600	920	280	1000	360	1280	80	960	400	1600	240
2 邊	544	256	480	736	224	800	288	1024	64	768	320	1280	192
3 底	425	200	375	575	175	625	225	800	50	600	250	1000	150
4 黃廣	510	240	450	690	210	750	270	960	60	720	300	1200	180
5 黃長	272	128	240	368	112	400	144	512	32	384	160	640	96
6 上高	255	120	225	345	105	375	135	480	30	360	150	600	90
7 下高	255	120	225	345	105	375	135	480	30	360	150	600	90
8 上平	136	64	120	184	56	200	72	256	16	192	80	320	48
9 下平	136	64	120	184	56	200	72	256	16	192	80	320	48
10 大差	408	192	360	552	168	600	216	768	48	576	240	960	144
11 小差	170	80	150	230	70	250	90	320	20	240	100	400	60
12 皇極	289	136	255	391	119	425	153	544	34	408	170	680	102
13 太虛	102	48	90	138	42	150	54	192	12	144	60	240	36
14 明	153	72	135	207	63	225	81	288	18	216	90	360	54
15 夷	34	16	30	46	14	50	18	64	4	48	20	80	12

識別雜記

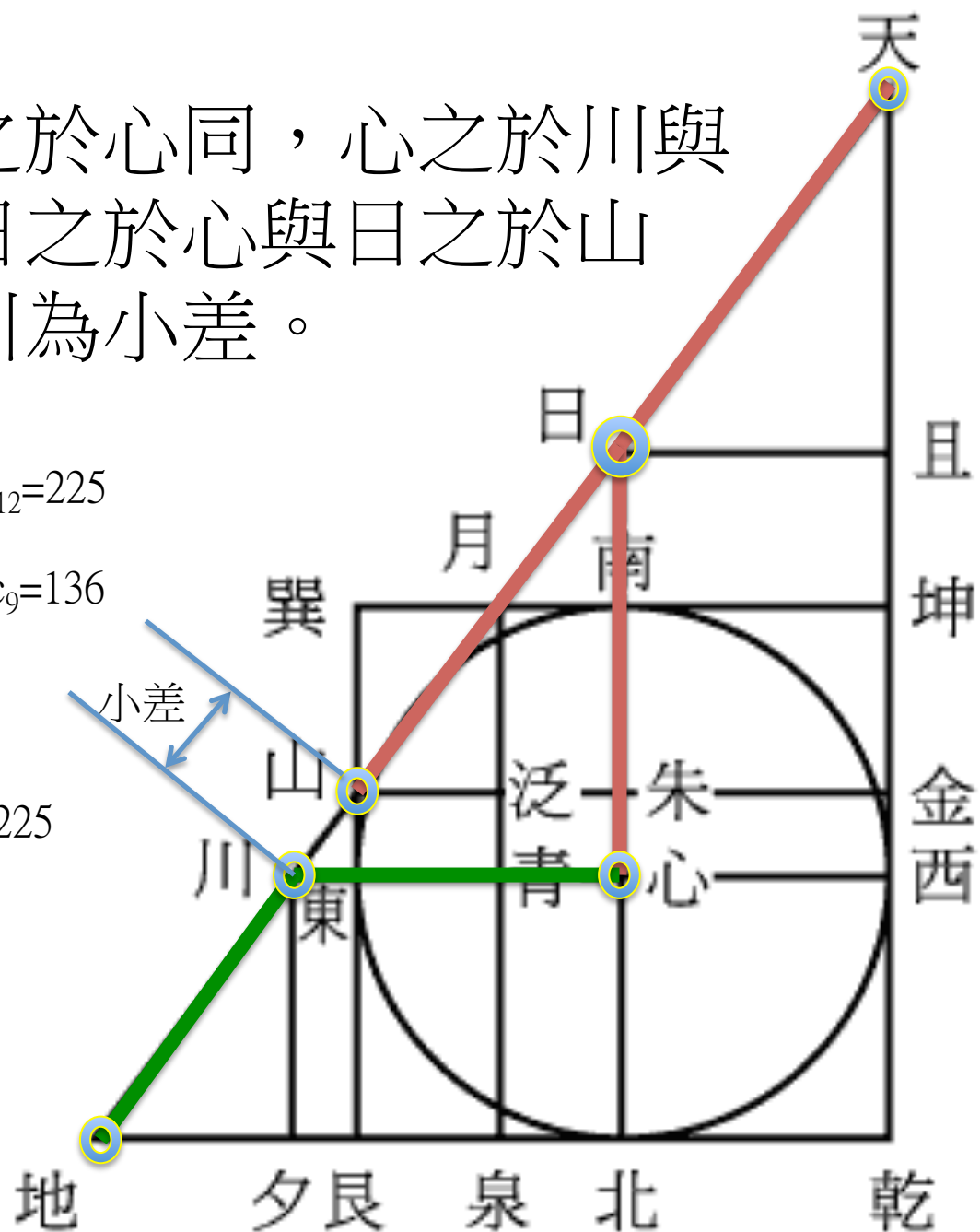
- 天之於日與日之於心同，心之於川與川之於地同。日之於心與日之於山同，故以山之川為小差。

天之於日與日之於心同 $c_6=b_{12}=225$

心之於川與川之於地同 $a_{12}=c_9=136$

日之於心與日之於山同 $b_{12}=c_7=225$

故以山之川為小差 $c_{15}=34$



Right-angle Triangle AEF and right-angle triangle OED are similar
(all angles are the same)

and their base $OD = EF = r$, radius of the inscribed circle.

Therefore, triangle AEF and triangle OED are congruent.

Thus, their hypotenuse must be of the same length

i.e. $AE = OE$ (天之於日與日之於心同).

Using the same argument, we have

$BG = OG$ (心之於川與川之於地同).

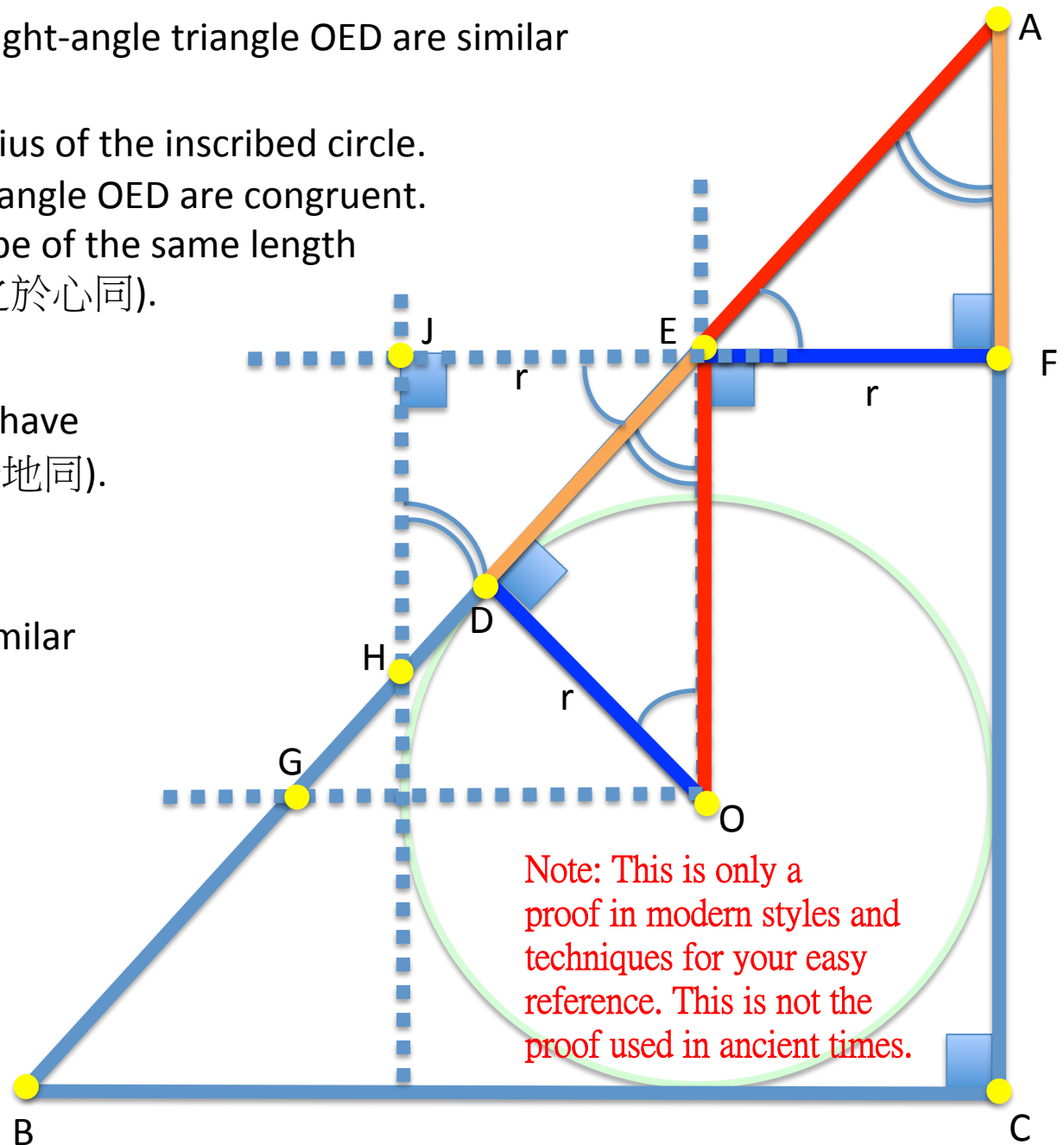
Right-angle Triangle HEJ and
right-angle triangle AEF are similar
(all angles are the same)

and their base $EJ = EF = r$,
radius of the inscribed circle.

Therefore, triangle HEJ and
triangle AEF are congruent.

Thus, their hypotenuse
must be of the same length
i.e. $AE = HE = OE$.

(日之於心與日之於山同).



Note: This is only a
proof in modern styles and
techniques for your easy
reference. This is not the
proof used in ancient times.

A modern approach to see why

弦和八十較十二

識別雜記

天之于日與日之於心同心之于川與川之于地同日之于心與日之于山同故以山之川為小差川之于心與川之于月同故以月之日為大差

明勾車股相得名為內率求虛積 明股車勾相得名為外率求虛積 虛勾虛股相得名為虛率求虛積

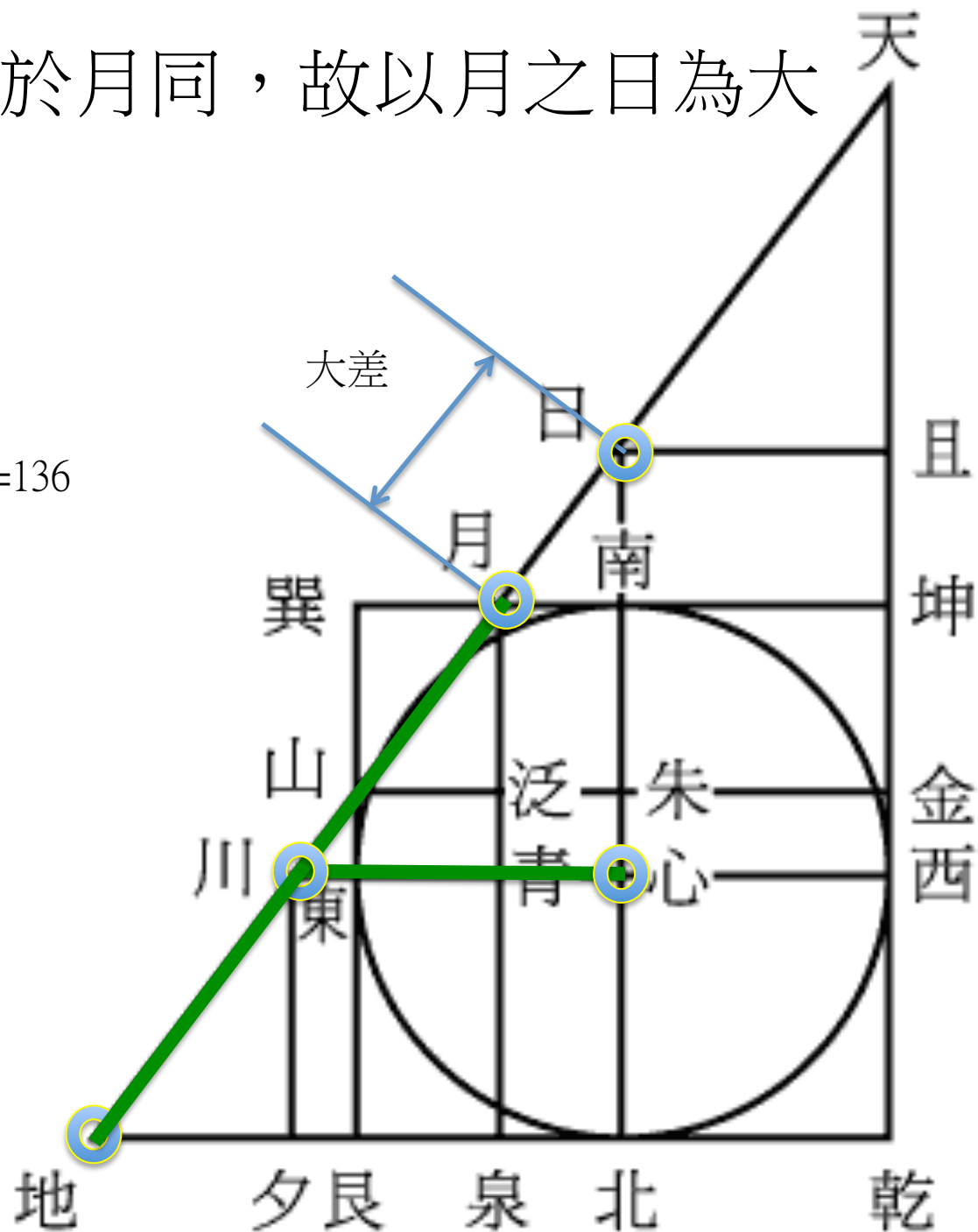
凡勾股和即弦黃和 凡大差即股黃較 凡小差即勾黃較

高股平勾差名角差 又名遠差此數即高平二差共也 又為明和車和較也 又為通差內去極差又為極差虛差共 明車二差共名次差 又名近差 又名戾音列和此數 又為明大差車小差較也 勾圓

- 川之於心與川之於月同，故以月之日為大差。

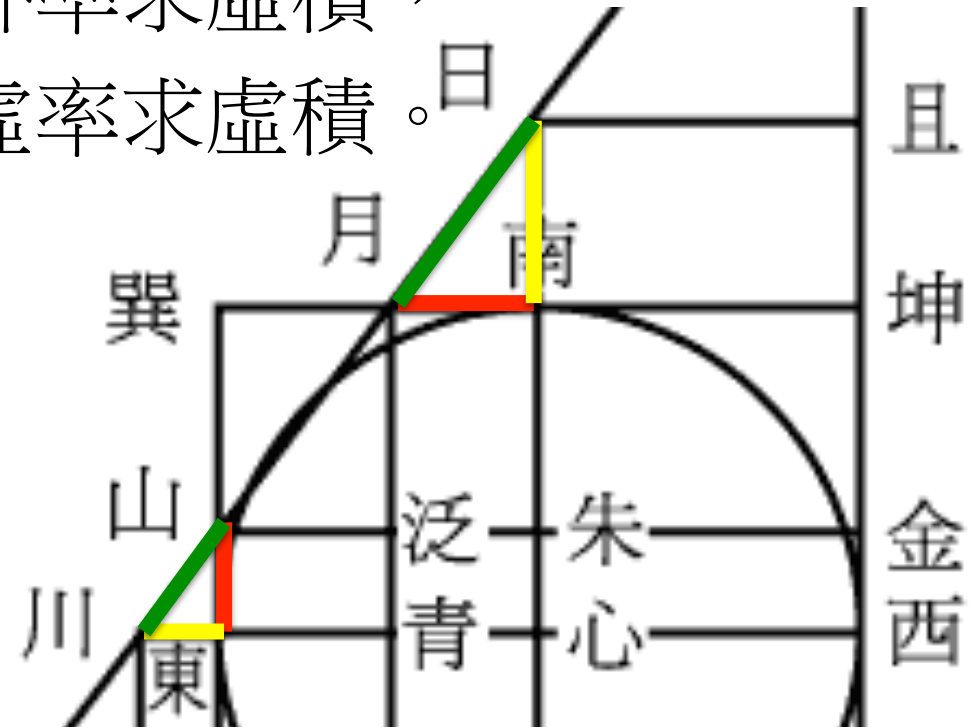
川之於心與川之於月同 $a_{12}=c_8=136$

故以月之日為大差 $c_{14}=153$



- 明勾夷股相得名為內率求虛積，
- 明股夷勾相得名為外率求虛積，
- 虛勾虛股相得名為虛率求虛積。

明勾夷股相得 $a_{14} \times b_{15}$ 內率求虛積
 明股夷勾相得 $a_{15} \times b_{14}$ 外率求虛積
 虛勾虛股相得 $a_{13} \times b_{13}$ 虛率求虛積



序號	三角形名稱	對應的三個頂點	弦 c		股 b		勾 a	
13	太虛	月山泛	太虛弦 (月山)	c_{13}	太虛股 (月泛)	b_{13}	太虛勾 (山泛)	a_{13}
14	明	日月南	明弦 (日月)	c_{14}	明股 (日南)	b_{14}	明勾 (月南)	a_{14}
15	夷	山川東	夷弦 (山川)	c_{15}	夷股 (山東)	b_{15}	夷勾 (川東)	a_{15}

- 凡勾股和即弦黃和，凡大差即股黃較，凡小差即勾黃較。

勾股和即弦黃和 $a+b = c+d$

RHS (Right-angle-Hypotenuse-Side), also known as HL (Hypotenuse-Leg): If two right-angled triangles have their hypotenuses equal in length, and a pair of shorter sides are equal in length, then the triangles are congruent.

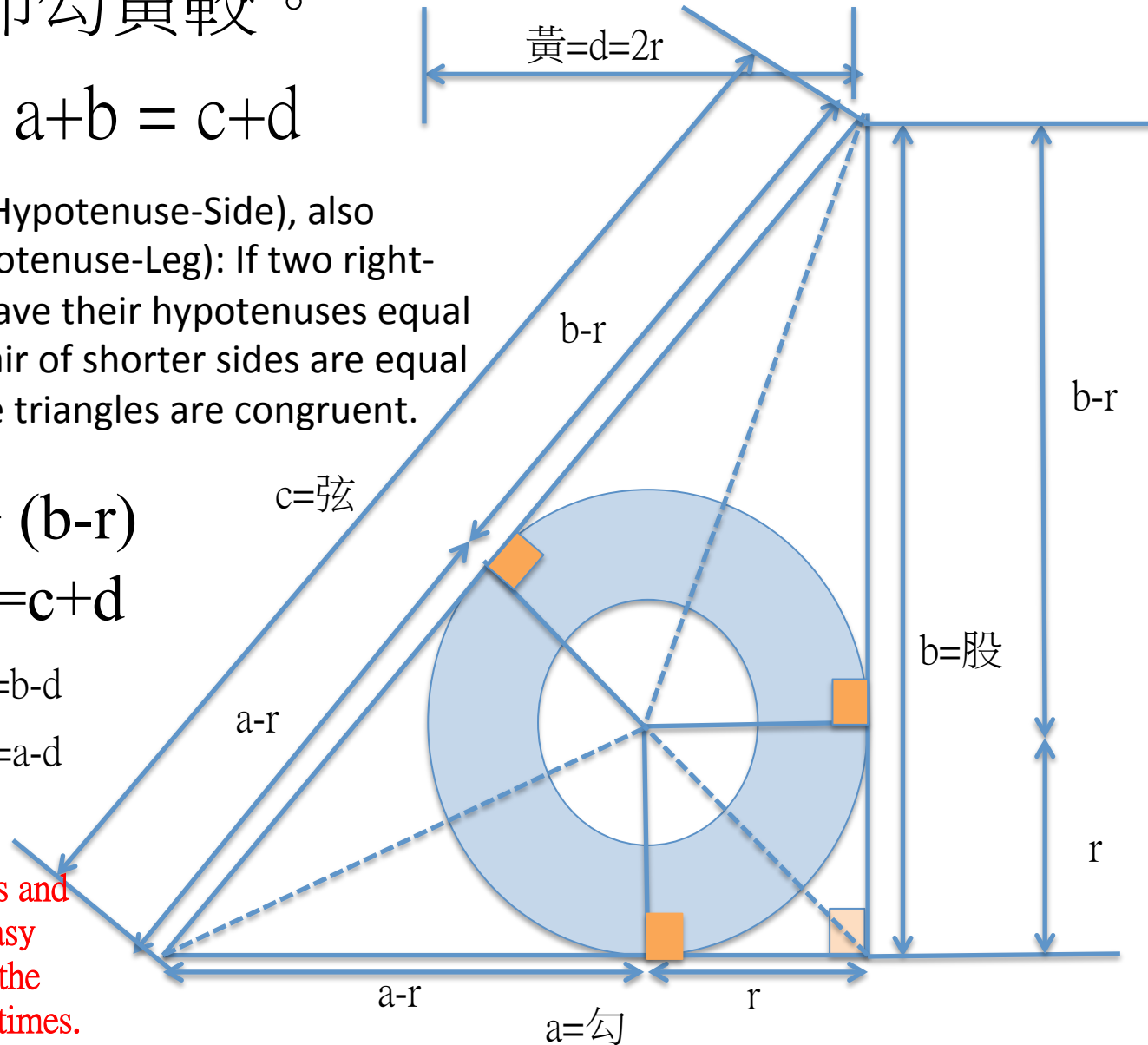
$$c = (a-r) + (b-r)$$

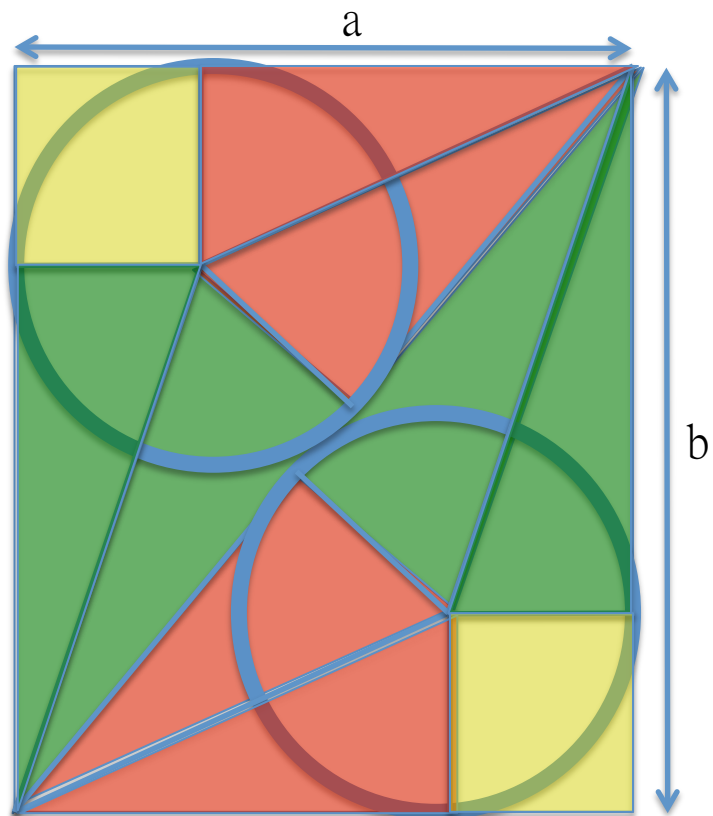
$$a+b=c+2r=c+d$$

大差即股黃較 $c-a=b-d$

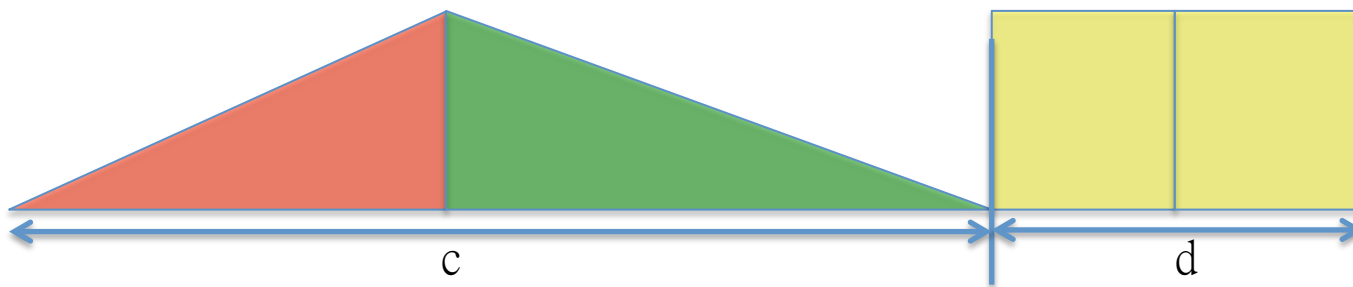
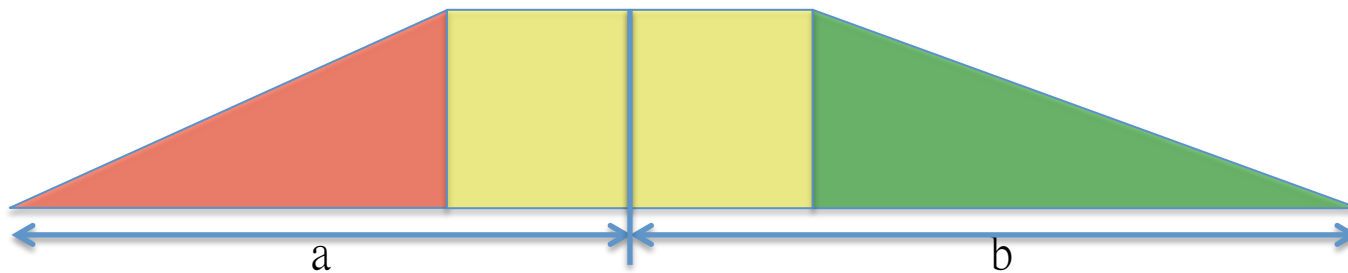
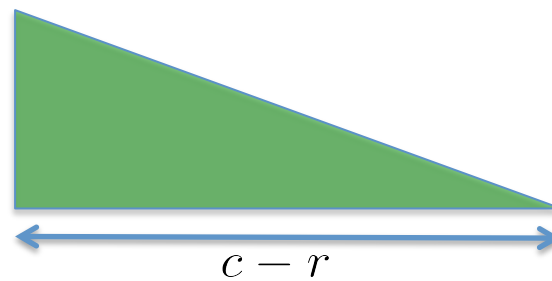
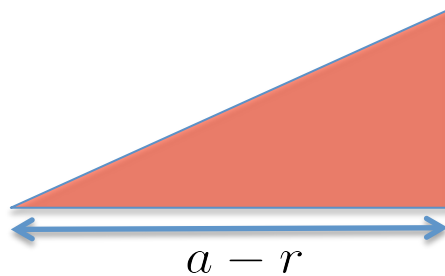
小差即勾黃較 $c-b=a-d$

Note: This is only a proof in modern styles and techniques for your easy reference. This is not the proof used in ancient times.





$$a + b = c + d$$



- 高股平勾差名角差，（又）名遠差。
- 角差(遠差) = 上高股 - 上平勾 = $b_6 - a_8$ = 下高股 - 下平勾 = $b_7 - a_9$
- 此數即高平二差共也，（又）為明和衷和較也（又）為通差內去極差，（又）為極差虛差共。
- $b_6 - a_8 = b_7 - a_9 = (b_6 - a_6) + (b_8 - a_8) = (b_7 - a_7) + (b_9 - a_9) = (a_{14} + b_{14}) - (a_{15} + b_{15})$
- $b_6 - a_8 = b_7 - a_9 = (b_1 - a_1) - (b_{12} - a_{12}) = (b_{12} - a_{12}) + (b_{13} - a_{13})$

序號	三角形名稱	對應的三個頂點	弦 c		股 b		勾 a	
6	上高	天日旦	上高弦 (天日)	c_6	上高股 (天旦)	b_6	上高勾 (日旦)	a_6
7	下高	日山朱	下高弦 (日山)	c_7	下高股 (日朱)	b_7	下高勾 (山朱)	a_7
8	上平	月川青	上平弦 (月川)	c_8	上平股 (月青)	b_8	上平勾 (川青)	a_8
9	下平	川地夕	下平弦 (川地)	c_9	下平股 (川夕)	b_9	下平勾 (地夕)	a_9
12	皇極	日川心	皇極弦 (日川)	c_{12}	皇極股 (日心)	b_{12}	皇極勾 (川心)	a_{12}
13	太虛	月山泛	太虛弦 (月山)	c_{13}	太虛股 (月泛)	b_{13}	太虛勾 (山泛)	a_{13}
14	明	日月南	明弦 (日月)	c_{14}	明股 (日南)	b_{14}	明勾 (月南)	a_{14}
15	衷	山川東	衷弦 (山川)	c_{15}	衷股 (山東)	b_{15}	衷勾 (川東)	a_{15}

- 明夷二差共名次差，（又）名近差，（又）名戾和。此數（又）為明大差夷小差較也。
- $(b_{14} - a_{14}) + (b_{15} - a_{15}) = (c_{14} - a_{14}) - (c_{15} - b_{15})$

序號	三角形名稱	對應的三個頂點	弦 c		股 b		勾 a	
10	大差	天月坤	大差弦（天月）	c_{10}	大差股（天坤）	b_{10}	大差勾（月坤）	a_{10}
11	小差	山地艮	小差弦（山地）	c_{11}	小差股（山艮）	b_{11}	小差勾（地艮）	a_{11}
12	皇極	日川心	皇極弦（日川）	c_{12}	皇極股（日心）	b_{12}	皇極勾（川心）	a_{12}
13	太虛	月山泛	太虛弦（月山）	c_{13}	太虛股（月泛）	b_{13}	太虛勾（山泛）	a_{13}
14	明	日月南	明弦（日月）	c_{14}	明股（日南）	b_{14}	明勾（月南）	a_{14}
15	夷	山川東	夷弦（山川）	c_{15}	夷股（山東）	b_{15}	夷勾（川東）	a_{15}

- 勾圓差之股、股圓差之勾相並名混同和，此數（又）為一徑一虛弦共也。
- $(b_{11} + a_{10}) = (d + a_{13})$

- 明夷二差較名傍差，此數又為高平二差較，又為極雙差內減虛和，又為極弦內減城徑也。
- $(b_{14} - a_{14}) - (b_{15} - a_{15}) = (b_6 - a_6) - (b_8 - a_8)$
- $= (b_7 - a_7) - (b_9 - a_9)$
- $= ((c_{13} - a_{13}) + (c_{13} - b_{13})) - (a_{13} + b_{13})$
- $= c_{12} - d$

序號	三角形名稱	對應的三個頂點	弦 c		股 b		勾 a	
6	上高	天日旦	上高弦 (天日)	c_6	上高股 (天旦)	b_6	上高勾 (日旦)	a_6
7	下高	日山朱	下高弦 (日山)	c_7	下高股 (日朱)	b_7	下高勾 (山朱)	a_7
8	上平	月川青	上平弦 (月川)	c_8	上平股 (月青)	b_8	上平勾 (川青)	a_8
9	下平	川地夕	下平弦 (川地)	c_9	下平股 (川夕)	b_9	下平勾 (地夕)	a_9
12	皇極	日川心	皇極弦 (日川)	c_{12}	皇極股 (日心)	b_{12}	皇極勾 (川心)	a_{12}
13	太虛	月山泛	太虛弦 (月山)	c_{13}	太虛股 (月泛)	b_{13}	太虛勾 (山泛)	a_{13}
14	明	日月南	明弦 (日月)	c_{14}	明股 (日南)	b_{14}	明勾 (月南)	a_{14}
15	夷	山川東	夷弦 (山川)	c_{15}	夷股 (山東)	b_{15}	夷勾 (川東)	a_{15}

- 虛差不及傍差名夔（音剉）差。此數又為大差差內去角差，又為極差內去二之平差，又為次差內去小差差，又為明股夷勾共內去二之明勾也。虛差旁差共名夔和。

$$\begin{aligned}
 & [(b_{14} - a_{14}) - (b_{15} - a_{15})] - (b_{13} - a_{13}) \\
 &= (b_{10} - a_{10}) - (b_8 - a_8) = (b_{10} - a_{10}) - (b_7 - a_9) \\
 &= (b_{12} - a_{12}) - 2(b_8 - a_8) = (b_{12} - a_{12}) - 2(b_9 - a_9) \\
 &= [(b_{14} - a_{14}) + (b_{15} - a_{15})] - (b_{11} - a_{11}) \\
 &= (b_{14} + a_{15}) - 2a_{14} \square
 \end{aligned}$$

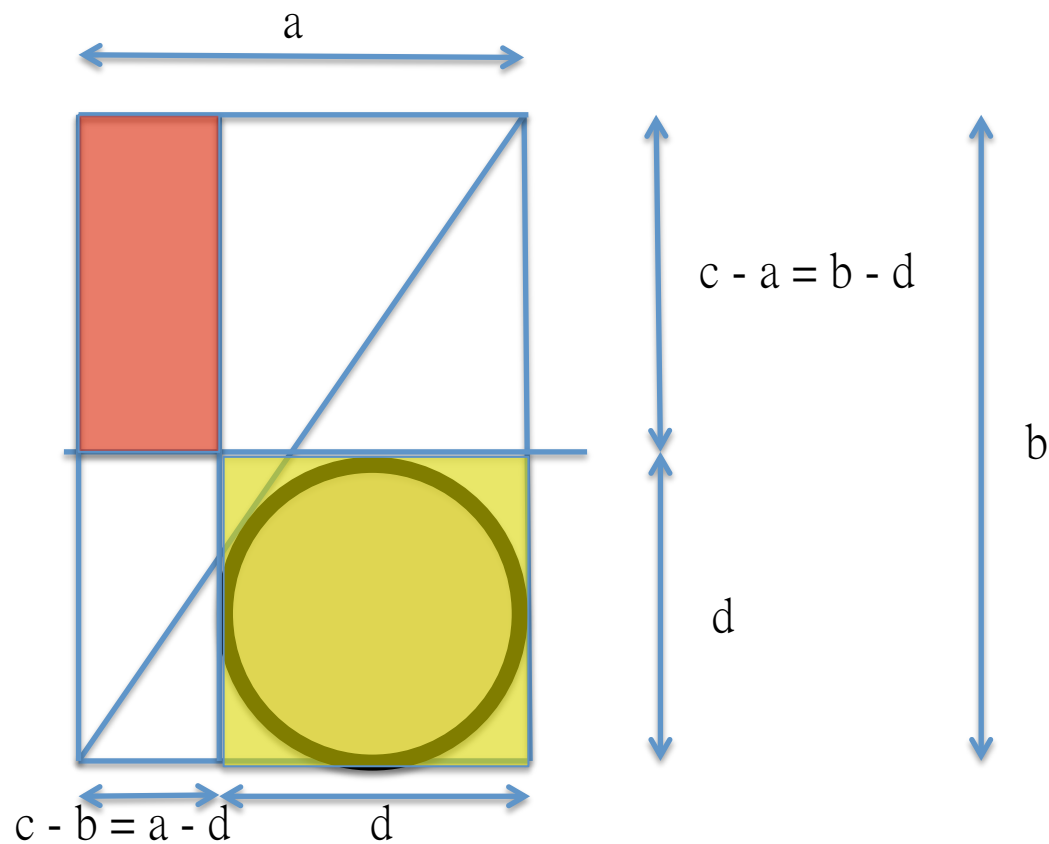
序號	三角形名稱	對應的三個頂點	弦 c		股 b		勾 a	
7	下高	日山朱	下高弦（日山）	c_7	下高股（日朱）	b_7	下高勾（山朱）	a_7
8	上平	月川青	上平弦（月川）	c_8	上平股（月青）	b_8	上平勾（川青）	a_8
9	下平	川地夕	下平弦（川地）	c_9	下平股（川夕）	b_9	下平勾（地夕）	a_9
10	大差	天月坤	大差弦（天月）	c_{10}	大差股（天坤）	b_{10}	大差勾（月坤）	a_{10}
11	小差	山地艮	小差弦（山地）	c_{11}	小差股（山艮）	b_{11}	小差勾（地艮）	a_{11}
12	皇極	日川心	皇極弦（日川）	c_{12}	皇極股（日心）	b_{12}	皇極勾（川心）	a_{12}
13	太虛	月山泛	太虛弦（月山）	c_{13}	太虛股（月泛）	b_{13}	太虛勾（山泛）	a_{13}
14	明	日月南	明弦（日月）	c_{14}	明股（日南）	b_{14}	明勾（月南）	a_{14}
15	夷	山川東	夷弦（山川）	c_{15}	夷股（山東）	b_{15}	夷勾（川東）	a_{15}

$$\begin{aligned}
& (b_{13} - a_{12}) - [(b_{14} - a_{14}) - (b_{15} - a_{15})] \\
&= (b_8 - a_8) - (b_{10} - a_{10}) = (b_7 - a_9) - (b_{10} - a_{10}) \\
&= 2(b_8 - a_8) - (b_{12} - a_{12}) = 2(b_9 - a_9) - (b_{12} - a_{12}) \\
&= (b_{11} - a_{11}) - [(b_{14} - a_{14}) + (b_{15} - a_{15})] \\
&= 2a_{14} - (b_{14} + a_{15})_0
\end{aligned}$$

- 凡大小差相乘為半段徑幕 $(c - a)(c - b) = \frac{1}{2}d^2$
- Prove that $2(c-a)(c-b) = d^2$
- LHS: $2(c-a)(c-b) = 2(c^2 - ac - bc + ab) = 2c^2 - 2ac - 2bc + 2ab$
- RHS: $d^2 = (a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ac - 2bc + 2ab$

using $a^2 + b^2 = c^2$ therefore, $d^2 = 2c^2 - 2ac - 2bc + 2ab = \text{LHS}$.

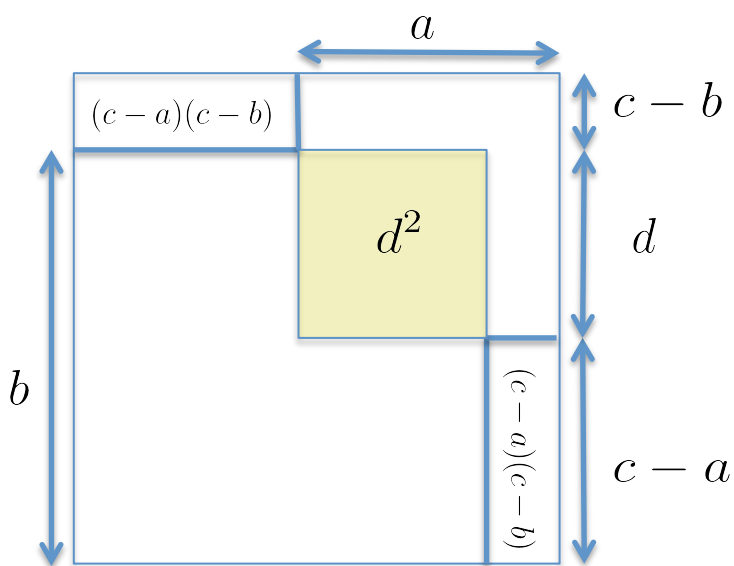
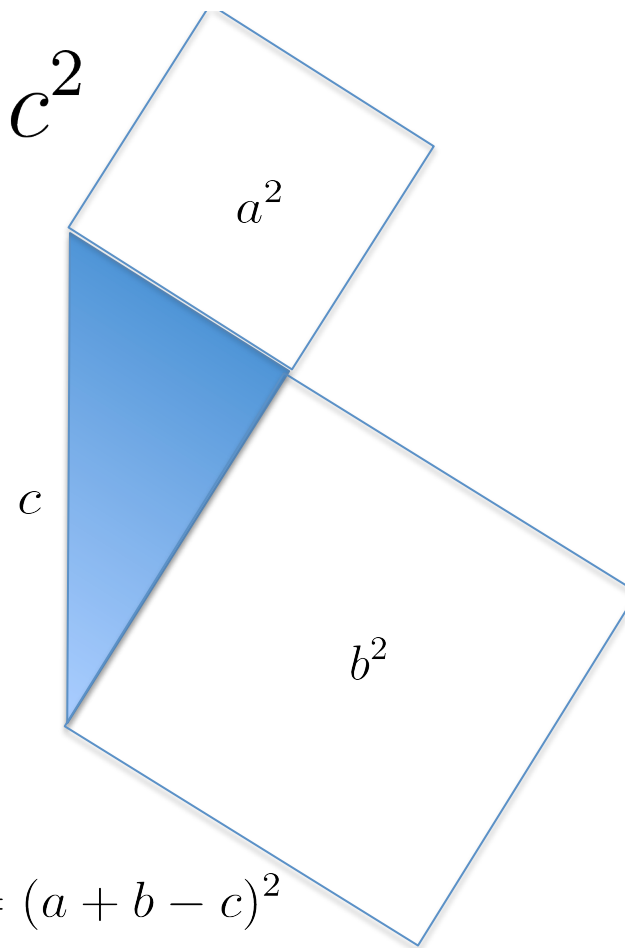
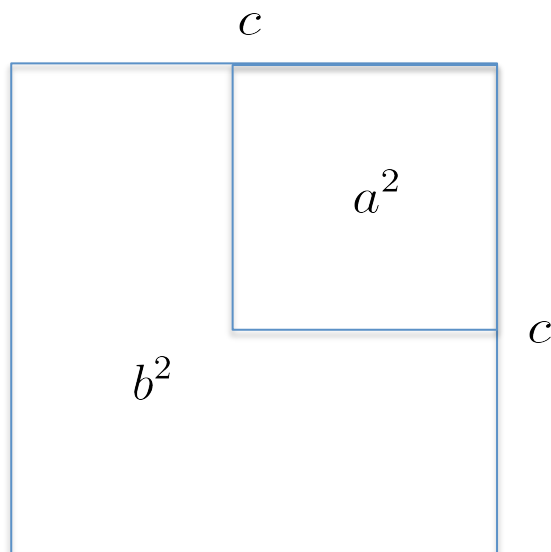
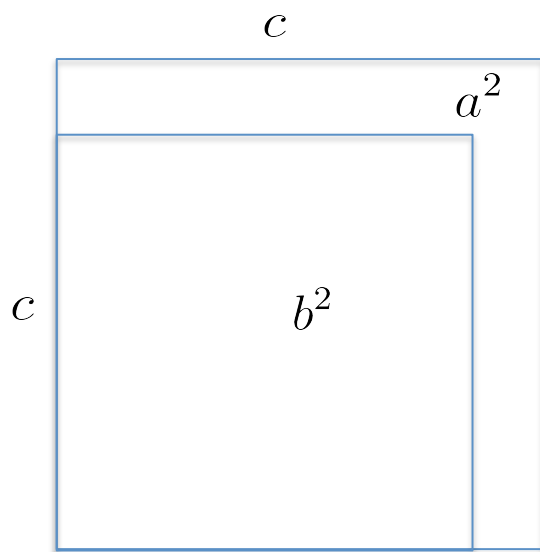
2 × 紅色長方形的面積 = 黃色正方形



Note: This is only a proof in modern styles and techniques for your easy reference. This is not the proof used in ancient times.

劉徽《九章算術注》

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$d^2 = (a + b - c)^2$$

$$a + b = c + d$$

$$a^2 + b^2 - d^2 + 2(c - a)(c - b) = c^2$$

$$d^2 = 2(c - a)(c - b)$$

- 凡大小差相乘為半段徑纂

$$(c_1 - a_1)(c_1 - b_1) = \frac{1}{2}d^2$$

- (大差勾小差股相乘亦同上) ,

$$a_{10} \cdot b_{11} = \frac{1}{2}d^2$$

- 虛勾乘大股得半段徑纂

$$a_{13} \cdot b_1 = \frac{1}{2}d^2$$

- (虛股乘大勾亦同上) 。

$$a_1 \cdot b_{13} = \frac{1}{2}d^2$$

- 邊股夷股相乘得半徑纂 $b_2 \cdot b_{15} = r^2$

- (明勾底勾相乘亦同上) ,

$$a_{14} \cdot a_3 = r^2$$

- 黃廣股黃長勾相乘為徑纂。

$$a_5 \cdot b_4 = d^2$$

- 高股平勾相乘得半徑纂 $a_8 \cdot b_8 = a_9 \cdot b_7 = r^2$

- 明弦明股並與夷弦夷勾並相乘得半徑纂

$$(b_{14} + c_{14})(a_{15} + c_{15}) = r^2$$

- (明弦明勾並與夷弦夷股並相乘，亦同上)

$$(a_{14} + c_{14})(b_{15} + c_{15}) = r^2$$

- 高弦平弦相乘為一段皇極積

$$c_6 \cdot c_8 = c_7 \cdot c_9 = a_{13} \cdot b_{13}$$

- 明勾夷股相乘，倍之為一段太虛積

$$2a_{14} \cdot b_{15} = a_{13} \cdot b_{13}$$

- (明股夷勾亦同)

$$2a_{15} \cdot b_{14} = a_{13} \cdot b_{13}$$

右諸雜名目

- 通弦上勾股和即一城徑、一通弦也，其較即勾圓差、股圓差較也。

$$b_1 + a_1 = d_1 + c_1$$

$$b_1 - a_1 = (b_1 - d_1) - (a_1 - d_1)$$

- 勾弦和即二勾一大差，其較則大差也。

$$c_1 + a_1 = 2a_1 + (c_1 - a_1)$$

$$c_1 - a_1 = (c_1 - a_1)$$

- 股弦和即二股一小差，其較則小差也。

$$c_1 + b_1 = 2b_1 + (c_1 - b_1),$$

$$c_1 - b_1 = (c_1 - b_1)。$$

- 弦較和為一徑三差共，其較則大勾小差共也。

$$c_1 + (b_1 - a_1) = d_{\square} + 3(b_1 - a_1),$$

$$c_1 - (b_1 - a_1) = a_1 + (c_1 - b_1)。$$

- 三事和即邊弦三事和上帶大勾也，又為底弦三事和上帶大股也，其較則城徑也。

$$(a_1 + b_1) + c_1 = [(a_2 + b_2) + c_2] + a_1$$

$$= [(a_3 + b_3) + c_3] + b_1$$

$$(a_1 + b_1) - c_1 = d_{\square}$$

- 邊弦上勾股和為通股平弦共，其較則大差股內去平弦也。

$$a_2 + b_2 = b_1 + c_8 = b_1 + c_9$$

$$b_2 - a_2 = b_{10} - c_8 = b_{10} - c_9$$

- 勾弦和即通股底勾共，其較則明股明弦共也。

$$c_2 + a_2 = b_1 + a_3$$

$$c_2 - a_2 = b_{14} + c_{14}$$

- 股弦和即通股通弦和內少個邊勾也，其較則平勾也。

$$c_2 + b_2 = (b_1 + c_1) - a_2$$

$$c_2 - b_2 = a_8 = a_9$$

- 弦較共為大差上股弦和，其較則大勾也。

$$c_2 + (b_2 - a_2) = b_{10} + c_{10}$$

$$c_2 - (b_2 - a_2) = a_1$$

- 三事和即通弦上股弦和，又為黃廣三事和上帶勾圓差也

$$[(a_2 + b_2) + c_2] = b_1 + c_1$$

$$[(a_4 + b_4) + c_4] + (d_1 - a_1)$$

- 其較則大差勾也，又為平弦上弦較和，又為太虛弦上股弦和也。

$$[(a_2 + b_2) - c_2] = a_{10}$$

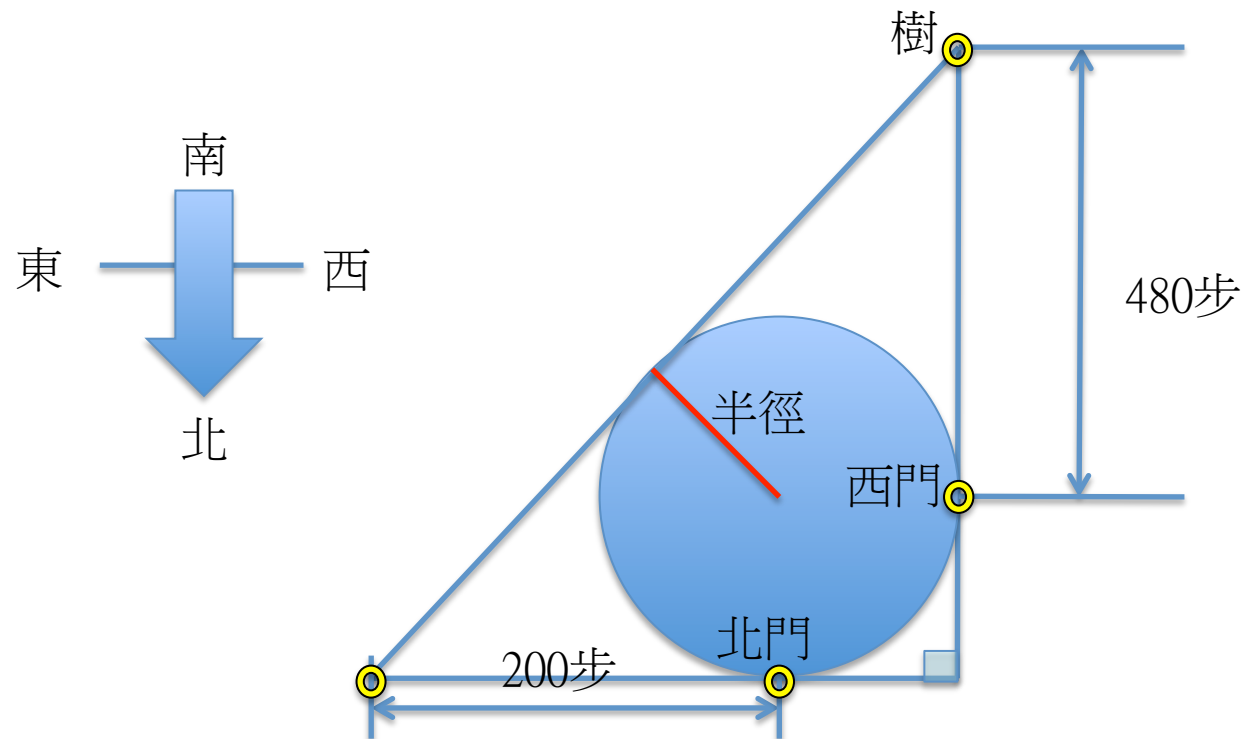
$$= c_8 + (b_8 - a_8)$$

$$= c_9 + (b_9 - a_9)$$

$$= b_{13} + c_{13}$$

Skip to 卷二：正率一十四問

- (the 14th problem)
- 出西門南行四百八十步有樹，出北門東行二百步見之。問答同前 (問徑幾里)。



草曰置出門步在地以五之得二百四十步即城徑也據此法合置出門步在地以十之二而一以二數相折故五因便是合問

按方五斜七古率非密率也設問以盡此題之變故率之疎密勿論

或問出西門南行四百八十步有樹出北門東行二百步見之問答同前

法曰以二行步相乘為實二行步相併為從二步常

欽定四庫全書
測圓海鏡 卷二 測圓海鏡 卷二
十二 十二

法得半徑

草曰立天元一為半徑置南行步在地內減天元半

徑得元為股圓差按斜畫者少之記也元是為四百八十步少一元也下做此

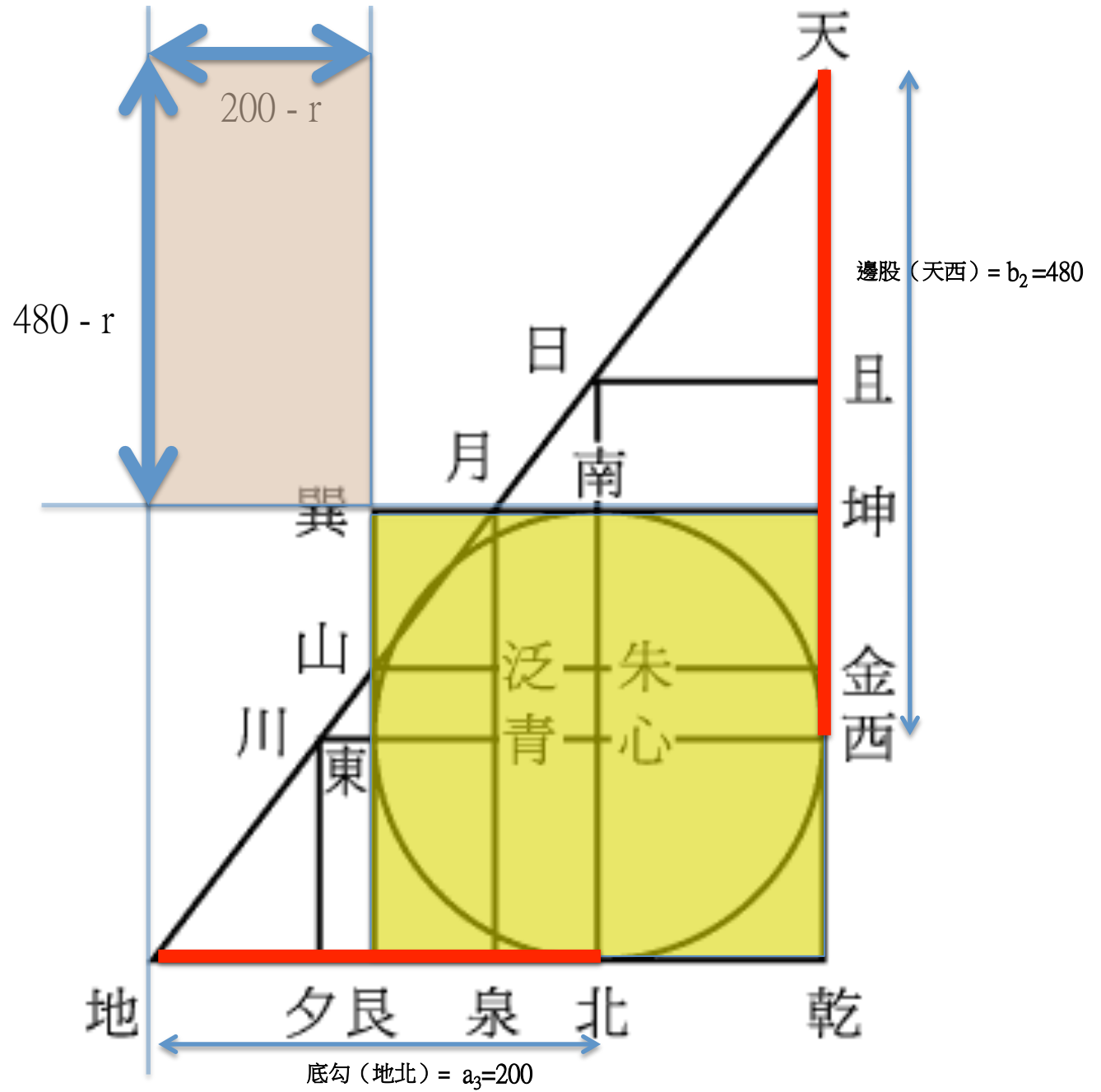
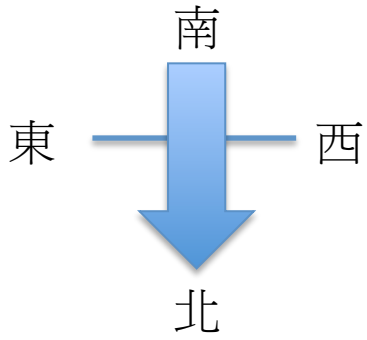
又置乙東行步在地內減天元得下式元為勾圓

差以勾圓差乘股圓差得元按一院為一平方少六百八十元

多九萬六千步為半段黃方冪即城冪之半也寄又置天元

冪以倍之得元亦為半段黃方冪與左相消得元

元如帶縱法之得半徑合問按相消者取上兩相等之數同加減相等



法曰：以二行步相乘為實，二行步相並為從，一步常法。得半徑。

草曰：

- 立天元一為半徑，(Let x be the radius)
- 置南行步在地，內減天元半徑，得 $\frac{480-x}{2}$ 為股圓差。
 $480 - x = \text{股圓差}$
- 又置乙東行步在地，內減天元，得下式 $\frac{200-x}{2}$ 為勾圓差。
 $200 - x = \text{勾圓差}$
- 以勾圓差增乘股圓差，得 $\frac{(200-x)(480-x)}{4}$ 為半段黃方冪，即城冪之半也。
- 又置天元冪以倍之，得 $2x^2$ ，亦為半段黃方冪，與左相消得 $\frac{96000 - 680x}{2}$ 。
- 如帶縱法之得半徑 合問。

$$(c - a)(c - b) = (b - d)(a - d) = \frac{1}{2}d^2$$

$$(200 - x)(480 - x) = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2$$

$$96000 - 680x + x^2 = 2x^2$$

$$96000 - 680x = x^2$$

$$x = 120 \text{ 步}$$

之數使一為步數一為方元數仍相等也如寄數內減一平方加六百八十元則得九萬六千步又數內亦減一平方加六百八十元則得一平方六百八十八元是為一平方六百八十八元與九萬六千步等故其式為一即舊稿方元數皆作斜畫以別之然遇方元數有多少異號者殊混人目今不用

又法識別得二行併即大弦也立天元一為半徑置甲

南行步加天元一得元為大股又置乙東行步加

天元得元為大勾也勾股相乘得元為一個

大直積以天元除之得下式元為三事寄左

除倍積得三事和令以半黃方除直積亦為三事和也然後併二行步又併入

欽定四庫全書

測圓海鏡 卷二

勾股共得元為同數與左相消得元以帶縱

平方開之得一百二十步倍之得全徑也合問

按是書皆先法後草草者以立天元一推行而得

其方元積數者也法者又取推行中之支節條目

融會而歸於簡約者也草者法之本法者草之用

法使人易於推步而草則存其義以俟知者二者

相須不可偏廢顧應詳僅演其開方乘除之數而

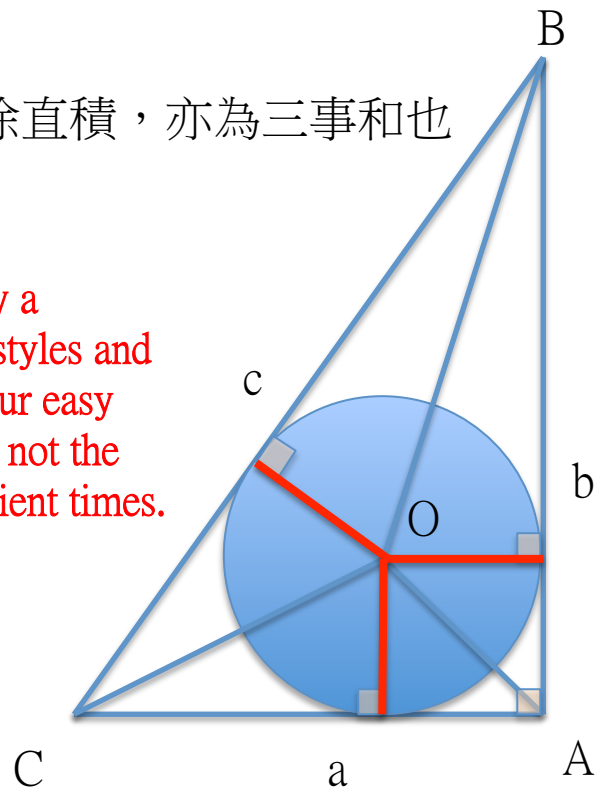
去其細草蓋亦不得其理矣

按元時未有筆算故加減乘除之式不能詳載觀者遂以為無下手處今借根方法既明視此則渙如冰釋矣

- 又法：識別得二行並即大弦也，立天元一為半徑。
- 置甲南行步加天元一，得 $\frac{1}{2} \frac{a^2}{1}$ 為大股。又置乙東行步加天元一，得 $\frac{1}{2} \frac{b^2}{1}$ 為大勾也。
- 勾股相乘，得 $\frac{1}{4} \frac{a^2 b^2}{1}$ 為一個大直積。
- 以天元除之，得下式 $\frac{1}{2} \frac{a^2 + b^2}{1}$ ，為三事和也。

今以半黃方除直積，亦為三事和也

Note: This is only a proof in modern styles and techniques for your easy reference. This is not the proof used in ancient times.



$$\text{Area of } \triangle ABC = ab / 2$$

$$\text{Area of } \triangle BOC = cr / 2$$

$$\text{Area of } \triangle AOB = br / 2$$

$$\text{Area of } \triangle AOC = ar / 2$$

$$\text{Therefore } \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{ab}{2}$$

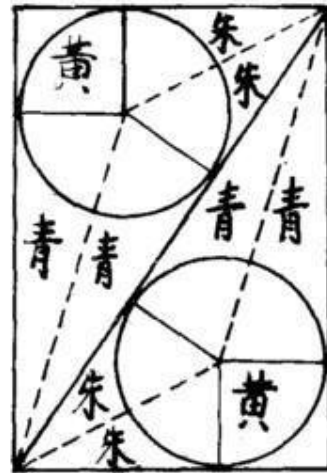
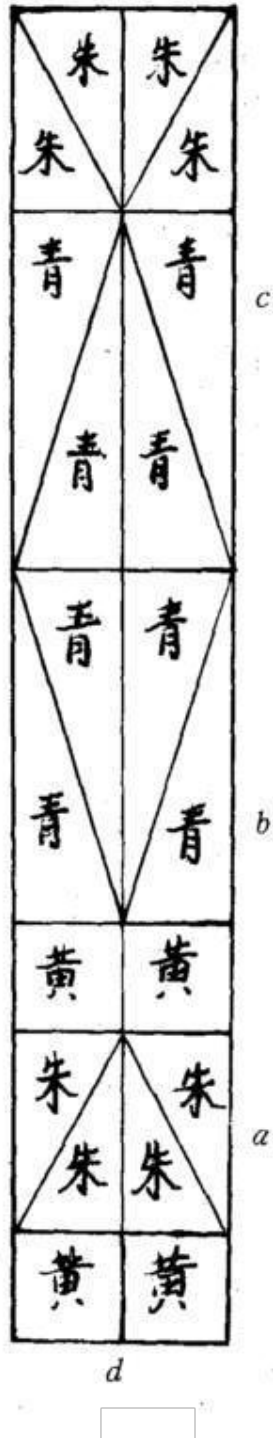
$$\frac{ab}{r} = a + b + c$$

半黃除大直積

三事和

see 劉徽注《九章算術》卷九「勾股」第十六

勾股容圓



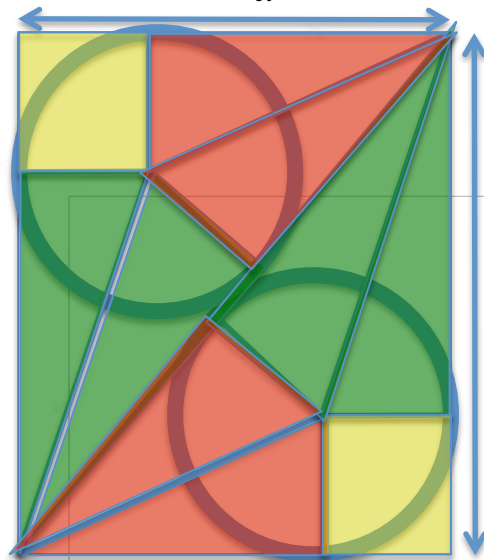
c



a

b

a



b

- 《九章算術》卷九「勾股」第十六：
- 今有勾八步，股十五步。問勾中容圓，徑幾何？
- 答曰：六步。
- 術曰：八步為勾，十五步為股，為之求弦。三位并之為法，以勾乘股，倍之為實。實如法得徑一步。
- 劉徽注: see figures on the left.

$$(a + b + c)d = 2ab$$

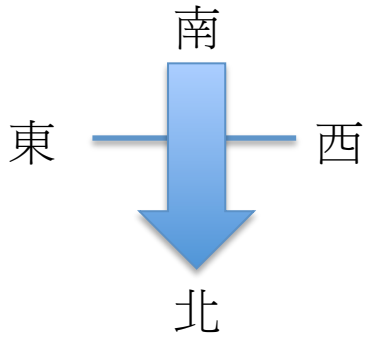
$$r = \frac{d}{2} = \frac{ab}{a + b + c}$$

$$\frac{ab}{r} = a + b + c$$

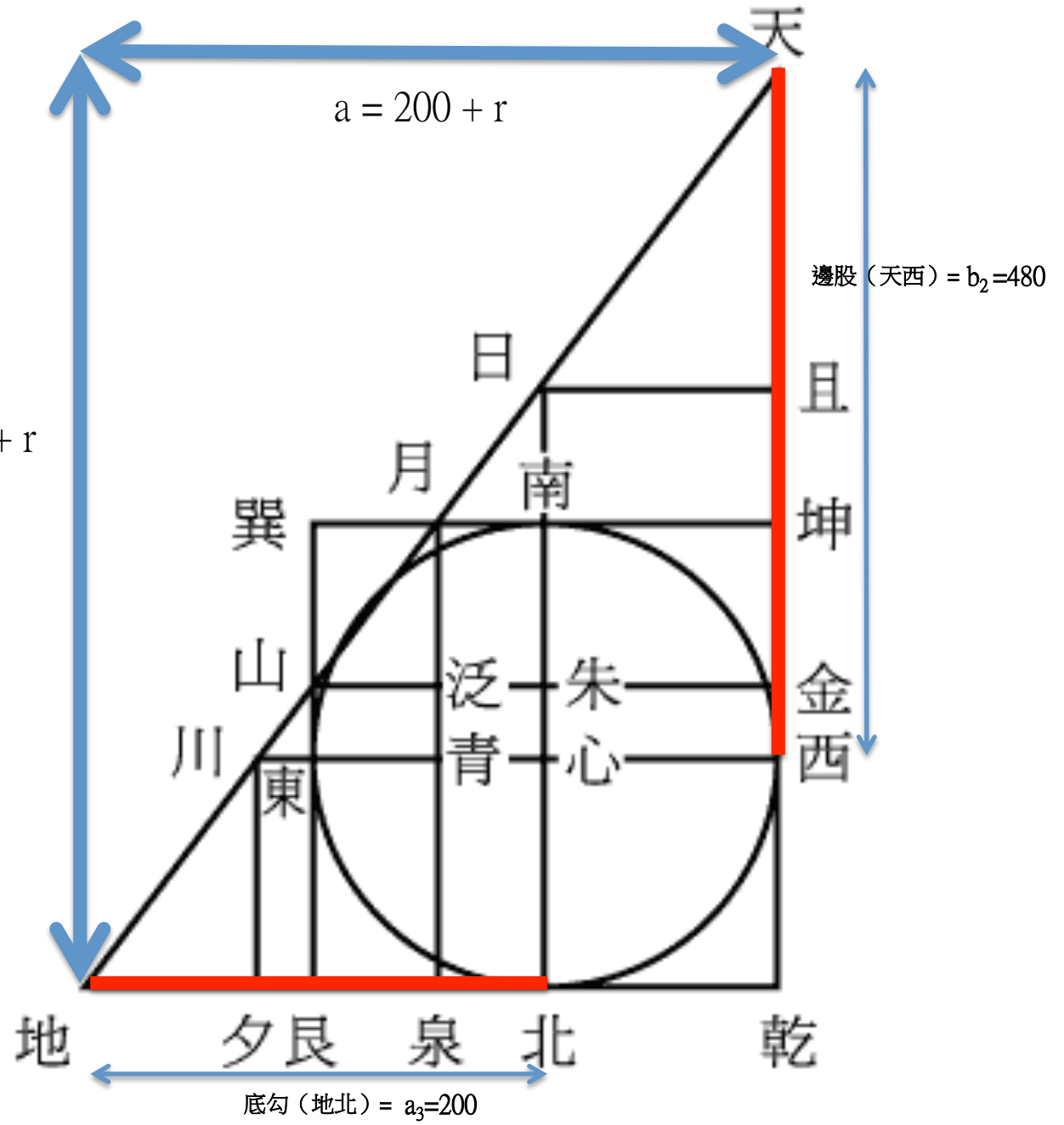
since $a + b = c + d = c + 2r$

Therefore

$$\frac{ab}{r} = a + b + a + b - 2r = 2a + 2b - 2r$$



$$b = 480 + r$$



$$\text{底勾 (地北)} = a_3 = 200$$

- 然後並二行步，又並入勾股共得 元 為同數，與左相消得 元。
- 以帶縱平方開之，得一百二十步，倍之得全徑也。合問。

$$\frac{ab}{x} = \frac{(200 + x)(480 + x)}{x} = 2a + 2b - 2x = 2(200 + x) + 2(400 + x) - 2x$$

$$\frac{96000 + 680x + x^2}{x} = 1360 + 2x$$

$$\frac{96000}{x} - 680 = x$$

$$96000 - 680x = x^2$$

$$x^2 + 680x = 96000$$









$$x = 120 \text{ 步}$$

Solve the quadratic equation 解一元二次方程

參考 Lecture Note Set #02 “開方術”

(《九章算術》卷九「勾股」第二十問)

This is not exactly the same as “帶縱平方開之” in 《測圓海鏡》

				
9	6	0	0	0
		6	8	0
		1 		
				

• 個 : Is it possible that

$$(680+1) \times 1 \leq 96000 \leq (680+9) \times 9 \quad ? \quad \circ \quad \times$$

• 十 : Is it possible that

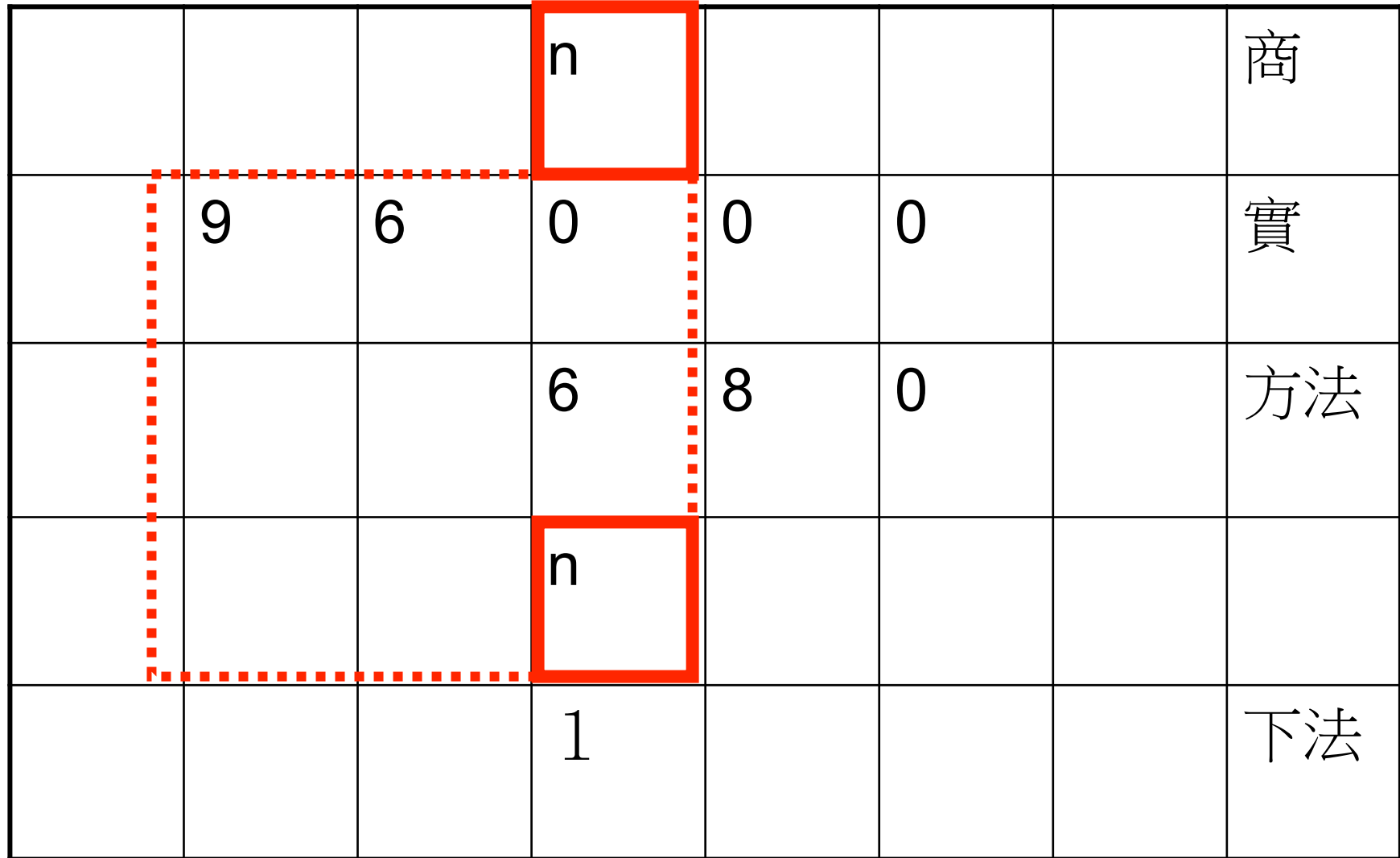
$$(680+10) \times 1 \leq 9600 \leq (680+90) \times 9 \quad ? \quad \circ \quad \times$$

• 百 : Is it possible that

$$(680+100) \times 1 \leq 960 \leq (680+900) \times 9 \quad ? \quad \circ \quad \leftarrow$$

determine n

			n				商
	9	6	0	0	0		實
			6	8	0		方法
			n				
			1				下法



- Find the largest single digit integer n so that $(100n+680) \times n \leq 960$

找最大的個位整數 n ，而 $(100n+640) \times n$ 要不大於 960。

- If $n=1$, $780 \times 1 = 780$ (less than 960)
- If $n=2$, $880 \times 2 = 1760$ (over 960!!!)

Therefore, $n=1$.

$$780 \times 1 = 780, \quad 960 - 780 = 180, \quad 1 \times 2 = 2$$

			1				商
	1	8	0	0	0		實
			8	8	0		方法
			1×2				
				1			下法

determine n

			1	n			商
	1	8	0	0	0		實
			8	8	0		方法
				n			
				1			下法

- Find the largest single digit integer n so that $(10n+880) \times n \leq 1800$
找最大的個位整數 n ，而 $(10n+740) \times n$ 要不大於 2200。
- If $n=1$, $890 \times 1 = 890$ (less than 1800)
- If $n=2$, $900 \times 2 = 1800$ (equal 1800)

Therefore, $n=2$.

$$900 \times 2 = 1800, \quad 1800 - 1800 = 0$$

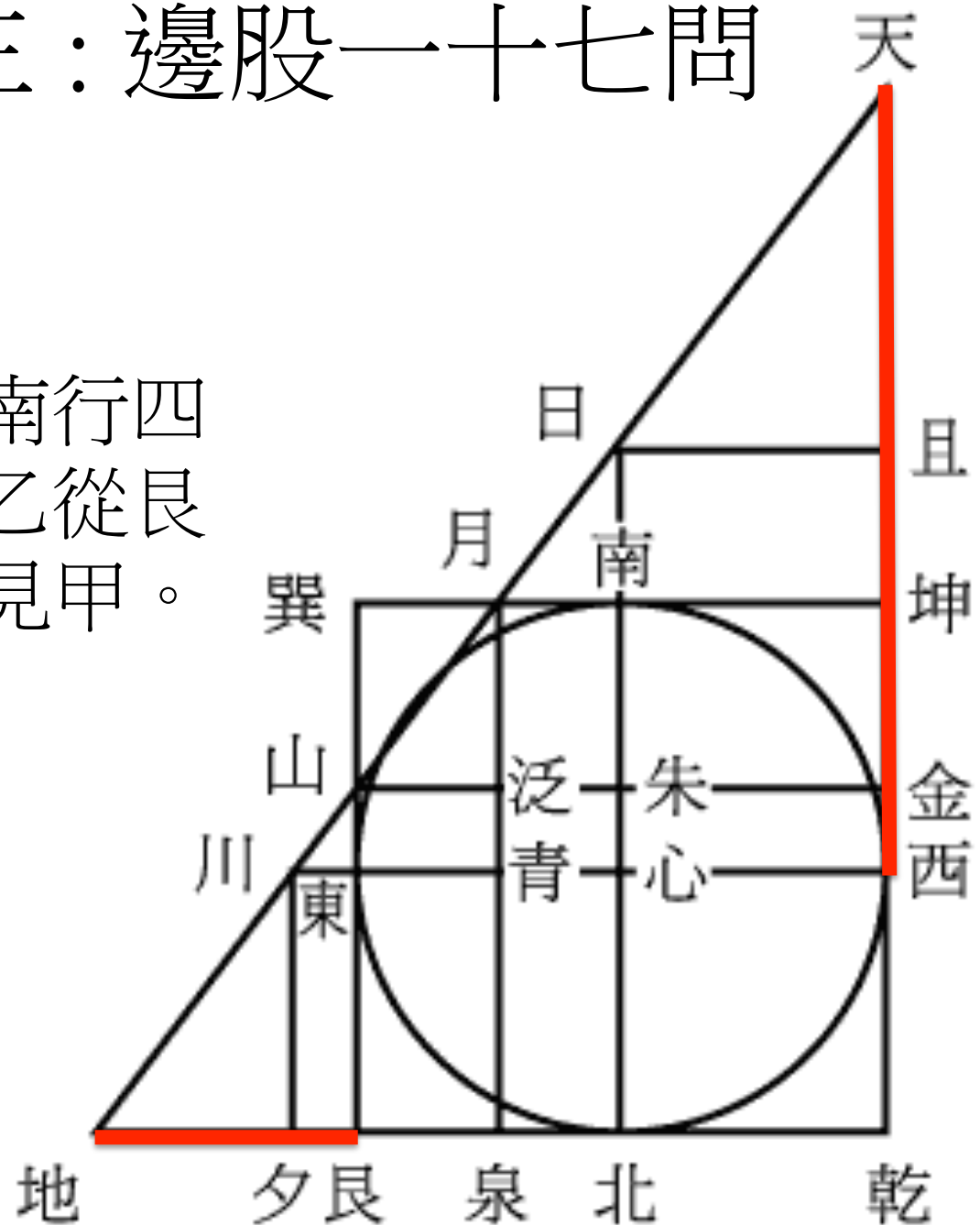
			1	2			商
					0		實
			9	0	0		方法
				1			下法

		1	2	0
		9	0	0
			1	

Skip to 卷三：邊股一十七問

(the 2nd problem)

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙從良隅東行八十步望見甲。問答同前。



徑

草曰識別得二行相減餘三十步即乙出東門南行步也倍相減步得六十步以乘二之甲南行步九百六十步得五萬七千六百步為平方實如法開之得二百四十步即城徑也合問

或問甲出西門南行四百八十步而止乙從艮隅東行八十步望見甲問答同前

法曰倍南行步以東行步乘之為實東行步為從方

法曰：倍南行步，以東行步乘之為實，東行步為從方，一步常法。得全徑。

草曰：立天元一為圓徑，(Let x be diameter d)

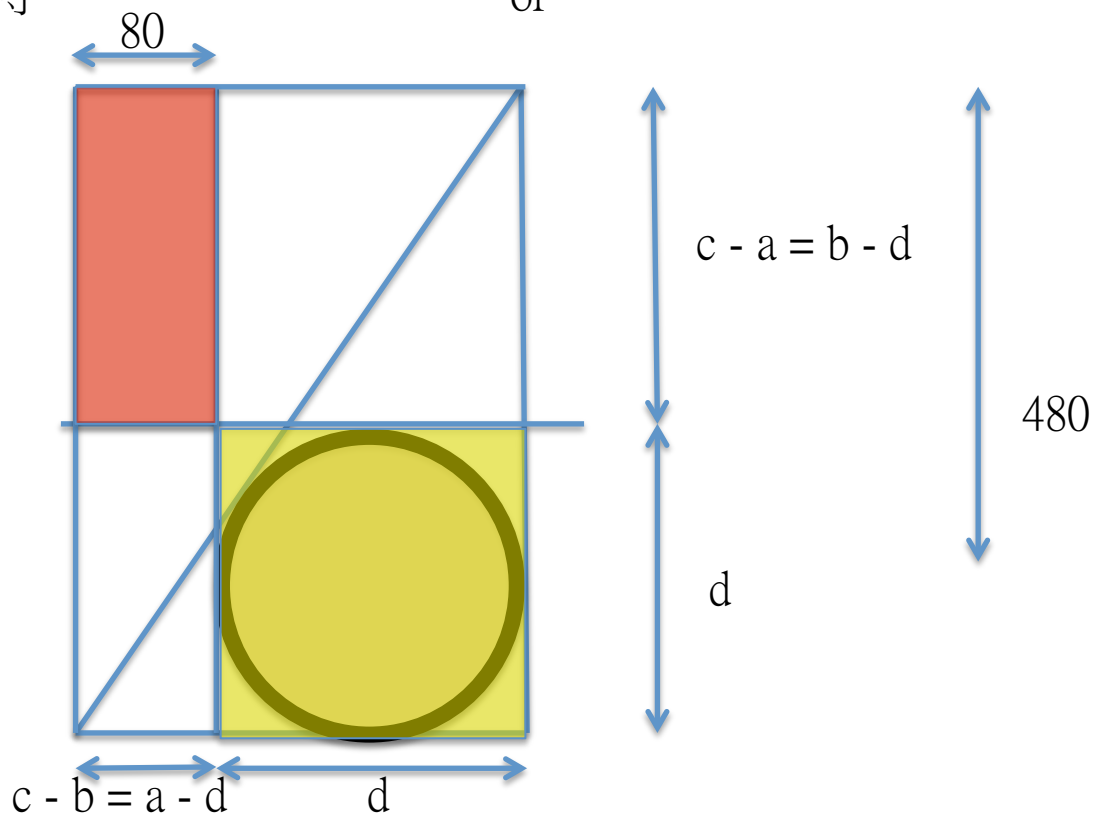
以減於二之甲南行步，得 ($2 \times 480 - x = 2(c - a)$) 為兩個大差也。

以乙東行步乘之，得 $(2 \times 480 - x)(80) = x^2$

$$76800 - 80x = x^2 \quad \text{為圓徑幕 (寄左) 。} \quad \text{or} \quad x^2 + 80x = 76800$$

然後以天元幕與左相消，得

以平方開之，
得二百四十步即城徑也。
合問。











Solve the quadratic equation 解一元二次方程

參考 Lecture Note Set #02 “開方術”

(《九章算術》卷九「勾股」第二十問)

This is not exactly the same as “帶縱平方開之” in 《測圓海鏡》

				
7	6	8	0	0
			8	0
		1 		
				

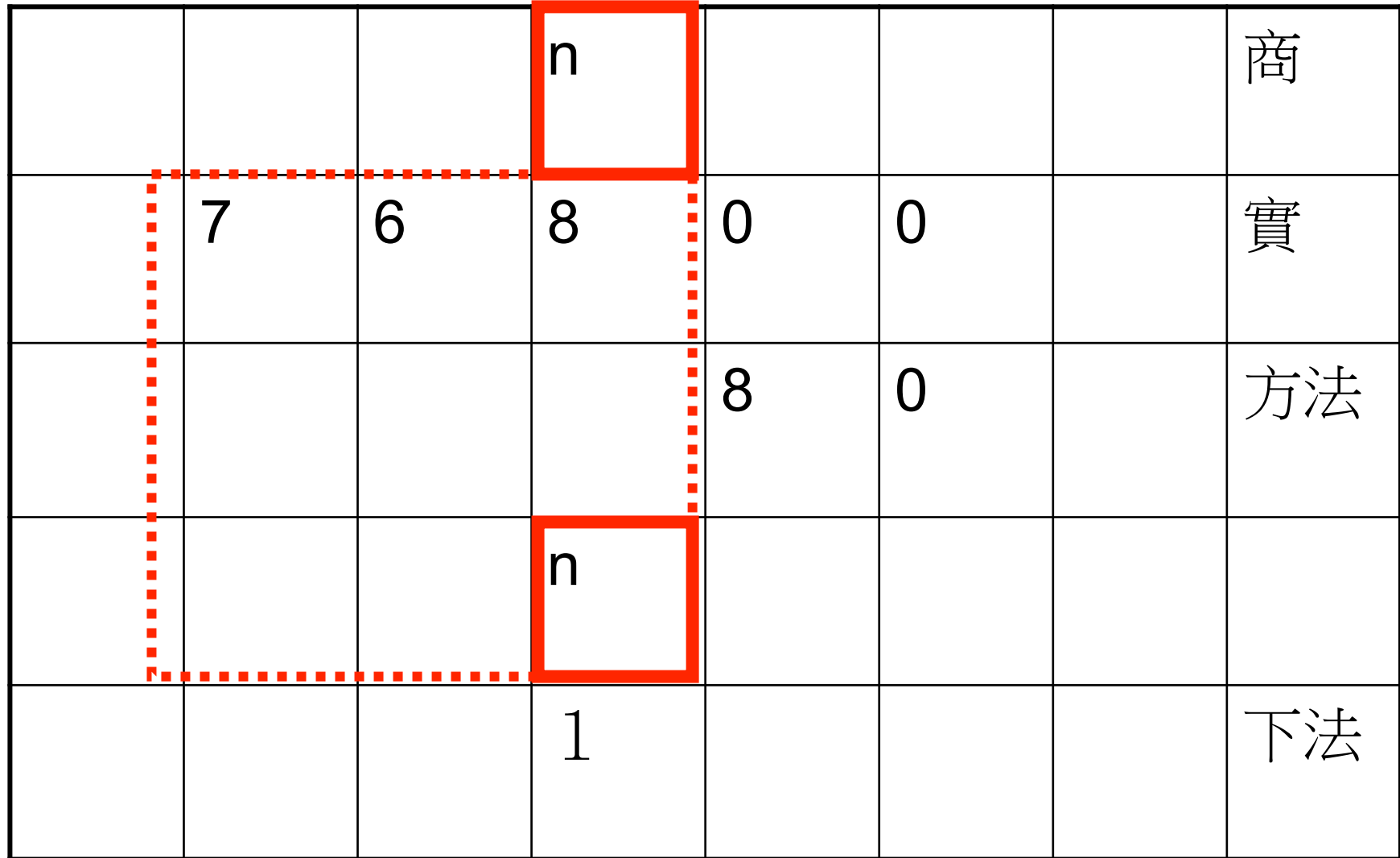
• 個 : Is it possible that $(80+1) \times 1 \leq 76800 \leq (80+9) \times 9$? ○ ×

• 十 : Is it possible that $(80+10) \times 1 \leq 7680 \leq (80+90) \times 9$? ○ ×

• 百 : Is it possible that $(80+100) \times 1 \leq 768 \leq (80+900) \times 9$? ○ ←

determine n

			n				商
	7	6	8	0	0		實
				8	0		方法
			n				
			1				下法



- Find the largest single digit integer n so that $(100n+80) \times n \leq 768$

找最大的個位整數 n ，而 $(100n+80) \times n$ 要不大於 768。

- If $n=1$, $180 \times 1 = 180$ (less than 768)
- If $n=2$, $280 \times 2 = 560$ (less than 768)
- If $n=3$, $380 \times 3 = 1140$ (over 768!!!)

Therefore, $n=2$.

$$280 \times 2 = 560, \quad 768 - 560 = 208, \quad 2 \times 2 = 4$$

			2				商
	2	0	8	0	0		實
			4	8	0		方法
			2×2				
				1			下法

determine n

			2	n			商
	2	0	8	0	0		實
			4	8	0		方法
				n			
				1			下法

- Find the largest single digit integer n so that $(10n+480) \times n \leq 2080$

找最大的個位整數 n ，而 $(10n+480) \times n$ 要不大於 2080。

- If $n=1$, $490 \times 1 = 490$ (less than 2080)
- If $n=2$, $500 \times 2 = 1000$ (less than 2080)
- If $n=3$, $510 \times 3 = 1530$ (less than 2080)
- If $n=4$, $520 \times 4 = 2080$ (equal 2080)

Therefore, $n=4$.

$$520 \times 4 = 2080, \quad 2080 - 2080 = 0$$

			2	4			商
					0		實
			4	8	0		方法
				1			下法

得二百四十步即城徑也。

		2	4	0
		4	8	0
			1	

- 李冶（1192年－1279年），原名李治，字仁卿，號敬齋，諡號文正，真定欒城（今河北省欒城縣）人，中國金代、元代文學家、數學家。李冶與楊輝、秦九韶、朱世傑並稱為「宋元數學四大家」。
- 李冶的祖籍是真定府欒城縣，於公元1192年生於大興府城（今北京市）。父親李遒曾在大興府尹胡沙虎手下任推官，讀過醫學、律學，後又改學六經詞賦，博學多才。母親王氏，是李遒的第三個妻子。李冶有兩個同父異母的弟兄，和兩個同胞姐妹。

- 李冶原名治，後來發現與唐高宗相同，於是改為冶。童年的李冶在元氏縣求學，據《元朝名臣事略》記載，李冶喜愛讀書，「手不釋卷」，性格聰穎，「有成人風」。
- 1213年，胡沙虎廢黜衛紹王完顏永濟，將其毒死，另立宣宗。李遹目睹朝綱敗壞，心灰意冷，託病辭職回到陽翟（今河南禹縣）隱居。這件事對李冶影響很大。李遹隱居後，李冶也遷來河南居住，並與常常登門求教李遹的**元好問**結交。

- 興定元年（1217年），李冶隨元好問到汴京向禮部尚書趙秉文求教，並拜趙秉文為師。後來又一起拜翰林楊雲翼為師。楊雲翼通曉曆法算學，曾在司天台任職，後任禮部尚書，和趙秉文合稱「趙楊」。到了正大年間，兩人已與趙楊齊名了。金哀宗正大七年（1230年），李冶赴洛陽應試，中進士，同年任高陵（今陝西高陵）主簿一職。但由於蒙古軍已經攻入陝西，他沒有赴任，被改派往鈞州（在今河南禹縣）任知事兩年。

- 1232年正月，蒙古軍攻破鈞州，李冶不願投降，只得微服北渡黃河，流連於忻山(今山西忻縣)和崞山(今山西崞縣)之間，生活十分辛苦，最後在桐川定居。在此期間，李冶父親病逝。1234年，金朝滅亡。李冶至此無心做官，潛心研究學問。
- 這時李冶生活艱苦，但仍以研究學問為樂。他的研究工作涉及數學、文學、歷史、天文、哲學、醫學。1240年，他得到一本叫做《洞淵九容》的算書，主要探討勾股容圓（也就是現代幾何學里直角三角形的內切圓）的問題。這本書使得李冶開始將主要精力放在研究數學之上。

- 1248年，李冶寫成《測圓海鏡》十二卷，在前人的基礎上改進出「天元術」，以「天元」作為未知數的記號來求解方程。
- 李冶在桐川與元好問來往甚密，常常在一起吟詩唱和，世人稱為「元李」。這個時期元好問的詩作中如《桐川與仁卿飲》、《和仁卿演太白詩意二首》等等中的「仁卿」就是指李冶。
- 李冶隱居著書時，生活艱苦，有時也要求諸他人。當時當地的管理和名儒都賞識他的學問。聶珪、張德輝、王鶚等都曾經給予他不同程度的幫助。

- 1242年，李冶到河南陽翟領父親遺體，安葬於祖塋，並請元好問為父親作墓誌銘。
- 李冶寫成《測圓海鏡》後不久，曾遷居太原。藩府官員曾請他出仕，被他拒絕。後來又流落平定，平定侯聶珪很敬重他，把他接到帥府居住，而並不勉強他做官。

- 1251年，李冶的經濟情況有所好轉，便回到元氏縣居住，在封龍山下買田隱居講學。後來學生漸多，達到數十人，家中已經容納不下，於是在北宋李昉讀書堂故基上建起封龍書院。
- 李冶不僅教授數學，也教授文史儒學。王德淵稱讚李冶「於六藝百家，靡不串貫」李冶在封龍書院講學共二十餘年，門下學生極多，培養出了大批人才。

- 在李冶門下求學的有日後的元朝中書右丞相史天澤、集賢學士焦養直、廉訪僉事張翼、翰林纂修承直郎王德淵等等。李冶與張德輝、元好問一起，號稱「龍山三老」。
- 1257年，忽必烈曾在上都開平召見李冶，向他請教用人治國之道以及對不久前發生的地震的看法，李冶對答有度，稱治國之道不外乎「立法度、正紀綱」，主張用人唯賢，賞罰分明，被忽必烈嘉許。1259年，李冶寫成另一部數學著作：《益古演段》。

- 1260年忽必烈登位後，欲聘請他為官，但李冶以老病為名，婉言拒絕。1264年，元朝為編寫遼、金、元歷史，設立翰林學士院。1265年李冶被召為翰林學士，就職一年之後，又以年老多病為理由辭官，繼續在封龍山隱居。
- 1279年，李冶在家中去世，享年88歲。

- 早期天元術的著作已經失傳，《測圓海鏡》是現存最早的系統地講述天元術的著作。
- 到了明代，天元術因為艱深難懂而少人研究，幾近失傳。
- 明代唐順抄錄過《測圓海鏡》，但不懂天元術；顧應祥曾經撰寫《測圓海鏡分類釋術》，但完全沒有明白天元術中天元為未知數的含義，因而將《測圓海鏡》中關於立天元列方程的演算全部刪去，只留下用開方術解方程的過程，以便後人學習。

- 李儼認為宋金元發展起來的天元術至此已被遺忘。《測圓海鏡分類釋術》一書，雖然刪除了天元術內容，但保存了全部算題，也補入正確的幾何學解法，使得幾近失傳的《測圓海鏡》，得以從新流傳。
- 十八世紀時，隨著西洋算學傳入中國，李冶等人的天元術著作才被後來的數學家重新發現。戴東原從《永樂大典》中輯錄出李冶《測圓海鏡》；

- 清代數學家對《測圓海鏡》給予很高評價：
 - 阮元認為《測圓海鏡》是「中土數學之寶書」。
 - 李善蘭稱讚它是「中華算書，無有勝於此者」。
 - 白尚恕說，《測圓海鏡》的成就，超過同時期的印度，阿拉伯和歐洲，「處於世界數學裡遙遙領先的地位」。

- 清朝梅穀成（梅文鼎之孫）曾經研讀元學士李冶的《測圓海鏡》，對其中的天元之術感到不解，後來在研習西方的「借根方」法時發現所謂的「借根」就是「立天元」（都是設未知數），方才重新開始認識天元術。
- 之後，《四元玉鑿》等其它天元術著作也被重新認識。孔廣森曾校對《測圓海鏡》中的四章。

- 乾隆三十八年（1773年），《四庫全書》收錄了李潢家藏本的《測圓海鏡》。1798年，清代大藏書家鮑廷博刊印的《知不足齋叢書》中收錄了李銳校勘的《測圓海鏡細草》十二卷。
- 之後又有焦循和李銳在研究了《測圓海鏡》、《益古演段》和《數書九章》後寫的《天元一釋》和《開方通釋》兩書，用較為明白的語言詳細解釋了李冶的天元術和秦九韶的正負開方術。

- 1873年，張楚鍾發表《測圓海鏡通釋》對《識別雜記》中的幾百條定理，用幾何方法逐條證明。
- 1896年劉岳雲出版《測圓海鏡解》，發現《圓城圖式》中各線段的簡單加減關係，發表《諸率加減表》，此後李善蘭出版《測圓海鏡解》等。他在另一篇著作《天算或問》中給出勾股容圓各公式的統一公式。

- 其後陳維祺發表《各率及較泛積表》將《識別雜記》用「泛積」概念統一表示。
- 王季同在《九容公式》中進一步發展了陳維祺的成果，發現
- 極勾 = $\sqrt{(\text{高股} \times \text{平勾} + (\text{平勾})^2)}$
- 極股 = $\sqrt{(\text{高股} \times \text{平勾} + (\text{高股})^2)}$
- 半徑 = $\sqrt{(\text{高股} \times \text{平勾})}$

- 19世紀初，朝鮮數學家南秉哲著《海鏡細草解》。
- 1913年，法國學者 L.van Hoe 介紹《測圓海鏡》。
- 1982年，法國林力娜（K. Chemla）作論文 Etude du Livre Reflects des Mesuers du Cercle sur la mer de Li Ye，獲得博士學位。
- 1983年，新加坡大學教授藍麗蓉發表 Chinese Polynomial Equations in the Thirteenth Century，論述《測圓海鏡》。