广义非线性互补问题的投影收缩法*

孙德锋
(中国科学院应用数学研究所)

A PROJECTION AND CONTRACTION METHOD FOR THE NONLINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEM AND ITS EXTENSIONS

Sun De-feng
(*Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper we propose a new globally convergent iterative method for solving the nonlinear complementarity problem and its related problems. The method behaves effectively for not only linear cases but also nonlinear cases. In a special case, our method reduces to the same, as was discussed in [9, 11, 22] for linear cases.

1. 引　　言

非线性互补问题 NCP(R^n_+, F) 是指：求 $x^* \in R^n_+$, 使得

$$F(x^*)^T x^* = 0, \quad F(x^*) \in R^n_+, \tag{1.1}$$

其中 F 为 R^n_+ 到 R^n 中的映射. 本文考虑如下广义非线性互补问题：

求 $x^* \in X = \{x \in R^n | l \le x \le u\}$, 使得

$$F(x^*)^T (x - x^*) \ge 0, \quad \forall x \in X, \tag{1.2}$$

其中 l 和 u 是 $\{R \cup \{\infty\}\}^n$ 中的向量且 $l \le u$. 上面的问题记作 NCP(X, F). 当 $X = R^n_+$, 问题 (1.2) 退化成 (1.1). 设

$$X^* = \{x \in X | x \text{ 是NCP}(X,F) \text{ 的解}\}. \tag{1.3}$$

容易验证， $x \in X^*$ 当且仅当 x 满足下面的投影方程 (一般非光滑):

$$P_X[x - \beta F(x)] = x \text{ 对某一或任一} \beta > 0, \tag{1.4}$$

* 1993 年 4 月 20 日收到.

其中对任意向量 $y \in R^n$,

$$P_X(y) = \arg\min\left\{x \in X \big| \|x - y\|\right\}, \tag{1.5}$$

这里 $\|\cdot\|$ 定义为 R^n 中的 l_2 范数或者由它诱导的矩阵范数. 此结果可见 [3]. 由 X 的简单性, 投影 $P_X(y)$ 容易实现. 当 X 是 R^n 中任何其它非空闭凸集时, 类似于 (1.2) 可以定义变分不等式问题 (简记为 VIP(X,F)). 同样可以定义 $X^* = \{x \in X|\ \ x$ 是 VIP(X,F) 的解 $\}$. 由 [3] 知, x 是 VIP(X,F) 的解当且仅当 x 是投影方程 (1.4) 的解. 故本文集中在求解投影方程 (1.4). 在数学规划领域, 求解 NCP(X,F) 及 VIP(X,F) 已经有很长的历史, 例如可见 [7].

定义 1.1. 映射 F: $R^n \to R^n$ 称为:

(a) 在集合 X 上单调, 如果

$$[F(x) - F(y)]^T(x-y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X; \tag{1.6}$$

(b) 在集合 X 上伪单调 (pseudomonotone), 如果

$$F(y)^T(x-y) \geq 0 \Rightarrow F(x)^T(x-y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X; \tag{1.7}$$

(c) 在集合 X 上强单调, 如果存在一正常数 α, 使得

$$[F(x) - F(y)]^T(x-y) \geq \alpha\|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in X; \tag{1.8}$$

(d) 在集合 X 上满足可解性条件, 如果 X^* 非空并且对任意 $x^* \in X^*$ 有

$$F(x)^T(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in X. \tag{1.9}$$

当 $F(x)$ 在 X 上单调且 Lipschitz 连续, i.e. , 存在一正常数 L, 使得

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X, \tag{1.10}$$

Korpelevich[15] 利用外插技术给出了如下的外梯度法 (Extragradient Method):

$$\begin{cases} \overline{x}^k = P_X[x^k - \beta F(x^k)], \\ x^{k+1} = P_X[x^k - \beta F(\overline{x}^k)], \end{cases} \tag{1.11}$$

其中 $0 < \beta < 1/L$. 上述算法的优越性是它仅需单调性而不象 [4, 7, 20] 中的算法需要强单调性. 明显的缺点是它也需要 Lipschitz 常数, 而这在实际中不容易实现. 作者在 [21] 中给出了外梯度法的一种改进形式如下:

给定常数 $\eta \in (0,1), \alpha \in (0,1), s \in (0, +\infty)$. 迭代形式如下:

$$\begin{cases} \overline{x}^k = P_X[x^k - \beta_k F(x^k)], \\ x^{k+1} = P_X[x^k - \beta_k F(\overline{x}^k)], \end{cases} \tag{1.12}$$

其中 $\beta_k = s\alpha^{m_k}$ 并且 m_k 是使下式成立的最小非负整数：

$$\|F(\bar{x}^k) - F(x^k)\| \le \frac{\eta\|\bar{x}^k - x^k\|}{\beta_k}. \tag{1.13}$$

改进的算法不需要映射 $F(x)$ 的 Lipschitz 常数，并且有较好的数值结果．但数值结果在线性情形还不能与 [9, 10, 11] 针对线性情形设计的算法相比．本文的目的是给出一种新的求非线性互补问题的投影收缩算法，数值结果显示此算法不仅对线性情形有效而且对非线性情形也同样有效．本文的算法在特殊情形 (特别是对线性规划) 与 [11, 22] 给出的相应情形是一致的，而 [11,22] 的结果是针对线性互补问题给出的．

2. 基本引理

假设 X 是 R^n 中一非空闭凸集且 $F(x)$ 在 X 上连续．

引理 2.1[18]．如果 $F(x)$ 在 R^n 中的非空紧致凸集 Y 上连续，则存在 $y^* \in Y$ 使得

$$F(y^*)^T(y - y^*) \ge 0, \quad \forall y \in Y.$$

引理 2.2[23]．对投影算子 $P_X(\cdot)$, 有如下性质：

(i) 当 $y \in X$ 时 $[P_X(z) - z]^T[P_X(z) - y] \le 0, \forall z \in R^n$; (2.1)

(ii) $\|P_X(z) - P_X(y)\| \le \|z - y\|, \quad \forall y, z \in R^n$. (2.2)

引理 2.3[2,5]．给定 $x \in R^n$ 及 $d \in R^n$, 如下定义的函数：

$$\theta(\beta) = \frac{\|P_X(x + \beta\alpha) - x\|}{\beta}, \qquad \beta > 0 \tag{2.3}$$

是反序 (非增) 的．

选取任意常数 $\eta \in (0, 1]$, 定义

$$\varphi(x, \beta) = \eta F(x)^T\{x - P_X[x - \beta F(x)]\}, \tag{2.4}$$

$$\psi(x, \beta) = \frac{\eta\|x - P_X[x - \beta F(x)]\|^2}{\beta}, \tag{2.5}$$

其中 $\beta > 0, x \in X$.

由引理 2.2 之 (i), 取 $z = x - \beta F(x)$ 及 $y = x$ 得

$$\beta\Big\{x - P_X[x - \beta F(x)]\Big\}^T F(x) \ge \|x - P_X[x - \beta F(x)]\|^2. \tag{2.6}$$

结合 (2.4)–(2.5) 及 (2.6) 可得如下定理．

定理 2.1. 设 $\varphi(x, \beta)$ 和 $\psi(x, \beta)$ 由 (2.4) 及 (2.5) 分别定义，则

(i) $\varphi(x, \beta) \ge \psi(x, \beta), \qquad \forall x \in X$,

(ii) $x \in X$ 及 $\varphi(x, \beta) = 0 \leftrightarrow x \in X$ 及 $\psi(x, \beta) = 0 \leftrightarrow x \in X^*$.

定理 2.2. 假设 $F(x)$ 在 X 上连续且 $\eta\in(0,1)$. 如果 $S\subset X\backslash X^*$ 是一有界闭集，则存在一正常数 δ 使得对所有 $x\in S$ 及 $\beta\in(0,\delta]$ 有

$$\begin{aligned}&\{F(x)-F(P_X[x-\beta F(x)])\}^T\{x-P_X[x-\beta F(x)]\}\\&\le(1-\eta)F(x)^T\{x-P_X[x-\beta F(x)]\}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

证明. 由于 $S\subset X\backslash X^*$ 是一有界闭集及 $F(x)$ 在 X 上连续，故存在 $\delta_0>0$, 使得对所有 $x\in S$ 成立

$$\|P_X[x-F(x)]-x\|\ge\delta_0>0.\tag{2.8}$$

由引理 2.3 及 (2.8) 式，对所有 $\beta\in(0,1]$ 及 $x\in S$ 有

$$\frac{\|x-P_X[x-\beta F(x)]\|}{\beta}\ge\|x-P_X[x-F(x)]\|\ge\delta_0.\tag{2.9}$$

由 $F(x)$ 的连续性知， $F(x)$ 在 S 上有界且一致连续. 故再由引理 2.2 之 (ii) 可知，存在正数 δ, 使得对所有 $x\in S$ 及 $\beta\in(0,\delta]$ 有 (不妨设 $\delta\le1$)

$$\|F(P_X[x-\beta F(x)])-F(x)\|\le(1-\eta)\delta_0.\tag{2.10}$$

结合 (2.9) 及 (2.10) 知，对任意 $x\in S$ 及 $\beta\in(0,\delta]$ 有

$$\begin{aligned}&\{F(x)-F(P_X[x-\beta F(x)])\}^T\{x-P_X[x-\beta F(x)]\}\\&\le\|F(x)-F(P_X[x-\beta F(x)])\|\|x-P_X[x-\beta F(x)]\|\\&\le(1-\eta)\|x-P_X[x-\beta F(x)]\|^2/\beta\\&\le(1-\eta)F(x)^T\{x-P_X[x-\beta F(x)]\},\end{aligned}$$

其中上面最后一个不等式用到了 (2.6) 式，定理得证.

注 2.1. 上面的定理保证了 3 中给出的算法的合理性.

注 2.2. 当 $F(x)=Dx+c$ 并且 D 是一反对称矩阵 ($D^T=-D$) 时， (2.7) 式对 $\eta=1$ 及 $\beta\in(0,+\infty)$, $x\in X$, 成立.

3. 算法及收敛性

记

$$g(x,\beta)=F(P_X[x-\beta F(x)]),\qquad\beta>0.\tag{3.1}$$

定理 3.1. 设 $F(x)$ 在 X 上连续并且满足可解性条件 (1.9). 如果存在一正常数 β, 使得 (2.7) 式对某 $x\in X$ 成立，则

$$(x-x^*)^Tg(x,\beta)\ge\varphi(x,\beta)\qquad\forall x^*\in X^*.\tag{3.2}$$

证明. 由于 $F(x)$ 满足可解性条件 (1.9), 故对 $x^* \in X^*$ 有

$$\{P_X[x-\beta F(x)]-x^*\}F(P_X[x-\beta F(x)])\geq 0, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}(x-x^*)^Tg(x,\beta) &= (x-x^*)^TF(P_X[x-\beta F(x)])\\ &= \{x-P_X[x-\beta F(x)]\}^TF(P_X[x-\beta F(x)])\\ &\quad+\{P_X[x-\beta F(x)]-x^*\}^TF(P_X[x-\beta F(x)])\\ &\geq \{x-P_X[x-\beta F(x)]\}^TF(P_X[x-\beta F(x)]) \text{ (利用 (3.3) 式)}\\ &= \{x-P_X[x-\beta F(x)]\}^T\{F(P_X[x-\beta F(x)])-F(x)\}\\ &\quad+F(x)^T\{x-P_X[x-\beta F(x)]\}\\ &\geq (\eta-1)F(x)^T\{x-P_X[x-\beta F(x)]\}\\ &\quad+F(x)^T\{x-P_X[x-\beta F(x)]\}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

上面最后一个不等式利用了 (2.7) 式，从而得到

$$(x-x^*)^Tg(x,\beta)\geq \eta F(x)^T\{x-P_X[x-\beta F(x)]\}=\varphi(x,\beta).$$

给定正常数 $s\in(0,+\infty)$ 及 $\eta\in(0,1)$, 我们给出如下的算法：

算法 A. 给定 $x^0\in X$ 及正常数 $\alpha\in(0,1),\gamma\in(0,2)$. 对 $k=0,1,\cdots$, 如果 $x^k\notin X^*$, 执行.

1. 确定 $\beta_k=s\alpha^{m_k}$, 其中 m_k 是使下式成立的最小非负整数：

$$\begin{aligned}&\left\{x^k-P_X[x^k-\beta_kF(x^k)]\right\}^T\left\{F(x^k)-F(P_X[x^k-\beta_kF(x^k)])\right\}\\ &\quad\leq(1-\eta)F(x^k)^T\left\{x^k-P_X[x^k-\beta_kF(x^k)]\right\},\end{aligned} \tag{3.5}$$

2. 根据 (2.4) 及 (3.1) 分别计算 $\varphi(x^k,\beta_k),g(x^k,\beta_k)$,
3. 计算

$$\rho_k=\varphi(x^k,\beta_k)/\|g(x^k,\beta_k\|^2, \tag{3.6}$$

4. 令

$$x^{k+1}=P_X[x^k-\gamma\rho_kg(x^k,\beta_k)]. \tag{3.7}$$

当 $X=\{x\in R^n|l\leq x\leq u\}$, 我们可以给出算法 A 的改进形式：对 $x\in X$, 设

$$\begin{aligned}&N=\left\{i|(x_i=l_i\text{ 且}(g(x,\beta))_i\geq 0)\text{ 或}(x_i=u_i\text{ 且}(g(x,\beta))_i\leq 0)\right\},\\ &B=\{1,2,\cdots,n\}\backslash N.\end{aligned} \tag{3.8}$$

定义 $g_N(x,\beta), g_B(x,\beta)$ 如下：

$$(g_N(x,\beta))_i = \begin{cases} 0, & i \in B, \\ (g(x,\beta))_i, & i \in N, \end{cases}$$

$$(g_B(x,\beta))_i = (g(x,\beta))_i - (g_N(x,\beta))_i, \quad i = 1,\cdots,n. \tag{3.9}$$

容易验证，对任意 $x^* \in X^*$ 及 $x \in X$, 有

$$(x-x^*)^T g_N(x) \le 0, \quad (x-x^*)^T g_B(x,\beta) \ge (x-x^*)^T g(x,\beta). \tag{3.10}$$

定理 3.2. 在定理 3.1 的条件下有

$$(x-x^*)^T g_B(x,\beta) \ge \varphi(x,\beta), \quad \forall x^* \in X^*. \tag{3.11}$$

证明. 由定理 3.1 及 (3.10) 式易得.

算法 B (算法 A 的改进形式). 给定 $x^0 \in X$, $s \in (0,+\infty), \eta, \alpha \in (0,1)$ 及 $\gamma \in (0,2)$. 对 $k = 0,1,\cdots$, 如果 $x^k \notin X^*$, 执行.

1. 确定 $\beta_k = s\alpha^{m_k}$, 其中 m_k 是使下式成立的最小非负整数:

$$\begin{aligned}&\left\{x^k - P_X[x^k - \beta_k F(x^k)]\right\}^T \left\{F(x^k) - F(P_X[x^k - \beta_k F(x^k)])\right\} \\ &\le (1-\eta) F(x^k)^T \left\{x^k - P_X[x^k - \beta_k F(x^k)]\right\}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

2. 根据 (2.4) 及 (3.1) 分别计算 $\varphi(x^k,\beta_k), g(x^k,\beta_k)$.

3. 由 (3.8) 及 (3.9) 确定 $g_B(x^k,\beta_k)$ 并且计算

$$\rho_k = \varphi(x^k,\beta_k)/\|g_B(x^k,\beta_k)\|^2. \tag{3.13}$$

4. 令

$$x^{k+1} = P_X[x^k - \gamma\rho_k g_B(x^k,\beta_k)]. \tag{3.14}$$

注 3.1. 当 $F(x) = Dx + c$ 并且 D 为一反对称矩阵 $(D^T = -D)$ 时，如果取 $\eta = 1$ 及 $\beta = 1$, 则算法 B 与 [11] 中给出的算法是一致的. 注意到在 [11] 中给出的搜索方向 $g(x) = D^T\{x - P_X[x-(Dx+c)]\} + Dx + c$. 由于此时 $D^T = -D$, 故

$$\begin{aligned} g(x) &= -D\left\{x - P_X[x-(Dx+c)]\right\} + Dx + c \\ &= DP_X[x-(Dx+c)] + c = g(x,1), \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 β 取 1. 从而 [11] 中的搜索方向 $g_B(x)$ 等同于 $g_B(x,1)$, 并且步长的大小也完全一致. 特别对于线性规划，我们的算法与 [11] 中的相同. 当 $D^T \ne -D$ 时， [11] 中的算法与本文给出的不同. 当 $F(x)$ 为非线性映射时， [11] 中的算法没有相应的形式而本文的算法推广到了非线性情形.

对于算法的收敛性质，算法 A 的证明可类似算法 B 给出，故下面仅考虑算法 B.

定理 3.3. 假设 X^* 非空并且 $F(x)$ 在 $X=\{x\in R^n|l\le x\le u\}$ 上连续. 如果 $F(x)$ 在 X 上满足可解性条件 (1.9), 则对任意 $x^*\in X^*$, 由算法 B 产生的无穷点列 $\{x^k\}$ 满足

$$\|x^{k+1}-x^*\|^2\le\|x^k-x^*\|^2-\gamma(2-\gamma)\varphi^2(x^k,\beta_k)/\|g_B(x^k,\beta_k)\|^2. \tag{3.16}$$

证明. 由引理 2.2 之 (ii) 及定理 3.2 可得

$$\begin{aligned}\|x^{k+1}-x^*\|^2&=\|P_X[x^k-\gamma\rho_k g_B(x^k,\beta_k)]-x^*\|^2\\&\le\|x^k-\gamma\rho_k g_B(x^k,\beta_k)-x^*\|^2\\&=\|x^k-x^*\|^2-2\gamma\rho_k g_B(x^k,\beta_k)^T(x^k-x^*)+\gamma^2\rho_k^2\|g_B(x^k,\beta_k)\|^2\\&\le\|x^k-x^*\|^2-2\gamma\rho_k\varphi(x^k,\beta_k)+\gamma^2\rho_k^2\|g_B(x^k,\beta_k)\|^2\\&=\|x^k-x^*\|^2-2\gamma\varphi^2(x^k,\beta_k)/\|g_B(x^k,\beta_k)\|^2\\&\quad+\gamma^2\varphi^2(x^k,\beta_k)/\|g_B(x^k,\beta_k)\|^2\\&=\|x^k-x^*\|^2-\gamma(2-\gamma)\varphi^2(x^k,\beta_k)/\|g_B(x^k,\beta_k)\|^2,\end{aligned}$$

这就证明了 (3.16) 式.

定义

$$\mathrm{dist}(x,X^*)=\inf\{\|x-x^*\||x^*\in X^*\}. \tag{3.17}$$

由于 (3.16) 对任意 $x^*\in X^*$ 都成立，故由定理 3.3 得

$$[\mathrm{dist}(x^{k+1},X^*)]^2\le[\mathrm{dist}(x^k,X^*)]^2-\gamma(2-\gamma)\varphi^2(x^k,\beta_k)/\|g_B(x^k,\beta_k)\|^2, \tag{3.18}$$

i.e., 序列 $\{x^k\}$ 相对于集合 X^* 为 Féjer - 单调的.

定理 3.4. 假设定理 3.3 的条件成立，则存在 $\bar{x}^*\in X^*$, 使得 $x^k\to\bar{x}^*$ 当 $k\to+\infty$.

证明. 设 $x^*\in X^*$. 容易验证，每一 Féjer - 单调序列是有界的. 假设

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{dist}(x^k,X^*)=\delta_0>0, \tag{3.19}$$

则 $\{x^k\}\subset S=\{x\in X|\delta_0\le\mathrm{dist}(x,X^*),\|x-x^*\|\le\|x^0-x^*\|\}$, 并且 S 是一有界闭集. 由于 S 是有界闭集且 $S\subset X\backslash X^*$, 则由定理 2.2 知，存在一正常数 δ, 使得对所有 $x\in S$ 及 $\beta\in(0,\delta]$ 有 (2.7) 式成立. 从而推知

$$\beta_k\ge\min\{\alpha\delta,s\}>0,\quad\forall k. \tag{3.20}$$

由定理 2.1 及 (3.20) 易知

$$\inf\varphi(x^k,\beta_k)>0. \tag{3.21}$$

而由 $g_B(x,\beta)$ 的定义及 $F(x)$ 的连续性易知

$$\sup \|g_B(x^k,\beta_k)\| < +\infty. \tag{3.22}$$

由 (3.21) 及 (3.22) 得

$$\inf \varphi^2(x^k,\beta_k)/\|g_B(x^k,\beta_k)\|^2 = \varepsilon_0 > 0. \tag{3.23}$$

由 (3.19) 知，存在 $k_0 > 0$, 使得对所有 $k \geq k_0$ 有

$$[\mathrm{dist}(x^k, X^*)]^2 \leq \delta_0^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}(2-\gamma)\gamma. \tag{3.24}$$

另一方面，由 (3.18), (3.23) 及 (3.24) 得

$$[\mathrm{dist}(x^{k+1}, X^*)]^2 \leq [\mathrm{dist}(x^k, X^*)]^2 - \varepsilon_0(2-\gamma)\gamma \leq \delta_0^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}(2-\gamma)\gamma, \quad \forall k \geq k_0,$$

这与 (3.19) 式矛盾. 故有

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{dist}(x^k, X^*) = 0. \tag{25}$$

由上式及 (3.18) 式知，存在 $\overline{x}^* \in X^*$, 使得

$$x^k \to \overline{x}^*, \quad k \to +\infty.$$

注 3.2. 若 X^* 非空且 $F(x)$ 在 X 上伪单调，定理的结论成立，因为此时可解性条件成立.

注 3.3. 根据引理 2.1, 当 X 是 R^n 中非空紧致凸集时，有 $X^* \neq \phi$; 当 X 无界时，X^* 的非空性条件见 [7].

4. 数值实验

下面将给出利用算法 B 计算的一些例子的数值结果，并且与其它方法作了比较. 下面例子的计算结果以表格形式给出. 其中 NCP 代表文中的算法 B; EGM 代表 [15] 中的外梯度法； MEGM 代表 [21] 中改进的外梯度法； LCP 代表 [11] 中针对线性互补问题给出的算法. 取 $\alpha = 0.5, \eta = 0.95$ (当 η 靠近 1 时数值结果较好). 算法的终止准则为 $\varphi(x,1) \leq \eta\epsilon^2$, 其中 ε 为给定的精度 (注意 $\varphi(x,1) \geq \eta\|x - P_X[x - F(x)]\|^2$).

例 1. 本例为 4 维非线性互补问题 [14]. 取初步长 $s = \sqrt{\eta}/4$ 及 $\varepsilon^2 = 10^{-16}$. 表 1 是本例的计算结果. 表 1 清楚地显示了本文算法在不同 γ 值条件下都比 MEGM 快得多. 由于该例为非线性非 Lipschitz 连续的，故 EGM 及 LCP 无法启用.

例 2. 考虑 4 维平衡点问题 [17]. 映射 $F: R \times R_+^2 \times R_+ \to R^4$ 具有如下形式：

$$F(y, P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} -P_1 + P_2 + P_3 \\ y - \alpha(b_2P_2 + b_3P_3)/P_1 \\ b_2 - y - (1-\alpha)(b_2P_2 + b_3P_3)/P_2 \\ b_3 - y \end{pmatrix},$$

其中常数 $b_2, b_3 > 0, \alpha \in (0,1)$. 对本例计算两组参数 $(\alpha, b_2, b_3) = (0.75, 1, 0.5)$ 和 $(0.75, 1, 2)$. 取 $s = \sqrt{\eta}/2, \varepsilon^2 = 10^{-16}$.

表 1. 例 1 的计算结果

算法	初始点	迭代次数	内部迭代次数
MEGM	(0,0,0,0)	380	758
NCP($\gamma = 1.95$)	(0,0,0,0)	22	22
NCP($\gamma = 1.0$)	(0,0,0,0)	52	52
MEGM	(1,1,1,1)	395	785
NCP($\gamma = 1.95$)	(1,1,1,1)	28	27
NCP($\gamma = 1.0$)	(1,1,1,1)	73	63

表 2. 例 2 的数值结果

参数值	算法	初始点	迭代次数	内部迭代次数
$\alpha = 0.75$	MEGM	(1,1,1,1)	103	0
$b_2 = 1.0$	NCP($\gamma = 1.95$)	(1,1,1,1)	42	0
$b_3 = 0.5$	NCP($\gamma = 1.0$)	(1,1,1,1)	56	0
$\alpha = 0.75$	MEGM	(1,1,1,1)	41	0
$b_2 = 1.0$	NCP($\gamma = 1.95$)	(1,1,1,1)	36	0
$b_3 = 2.0$	NCP($\gamma = 1.0$)	(1,1,1,1)	43	0

例 3. 我们研究 [1] 中考虑过的一个例子. $F(x) = Dx + c$, 其中 c 是 n 维向量, D 是非对称矩阵.

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -2 & & & \\ 1 & 4 & -2 & & \\ & 1 & 4 & -2 & \\ & & \ddots & \ddots & -2 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$X = [l, u]$, 其中 $l = (0, 0, \cdots, 0)^T, u = (1, 1, \cdots, 1)^T$. 对 EGM 和 MEGM 取初始步长 $s = \sqrt{\eta}/7$, 对 NCP 取初始步长 $s = \sqrt{\eta}/4$. 取 $\varepsilon^2 = n10^{-14}$, 其中 n 是问题的维数. NCP ($\gamma = 1.95$) 可与 LCP ($\gamma = 1.0$) 相比，并且都比 EGM 及 MEGM 快得多. 取不同的初始点，结论类似.

表 3. 例 3 取初始点 (0,0,⋯,0) 的数值结果

算 法	迭代次数 (左) 及内部迭代次数 (右)									
	$n=10$		$n=100$		$n=200$		$n=500$		$n=1000$	
EGM	59	0	59	0	59	0	59	0	58	0
MEGM	59	0	59	0	59	0	59	0	58	0
NCP(γ=1.95)	11	9	14	11	14	10	17	10	16	10
NCP(γ=1.0)	31	27	31	26	31	25	31	25	31	24
LCP(γ=1.95)	39	0	39	0	39	0	39	0	38	0
LCP(γ=1.0)	18	0	19	0	19	0	19	0	19	0

表 4. 例 4 取初始点 (0,0,⋯,0) 的数值结果

算 法	迭代次数 (左) 及内部迭代次数 (右)											
	$n=10$		$n=20$		$n=50$		$n=100$		$n=200$		$n=500$	
EGM	227	0	434	0	/		/		/		/	
MEGM	150	5	202	5	305	13	372	16	456	21	593	43
NCP(γ=1.95)	12	8	15	17	20	42	26	73	44	172	64	317
NCP(ν=1.0)	32	16	36	30	56	100	63	158	71	221	85	359
LCP(ν=1.95)	10	0	11	0	5	0	11	0	7	0	12	0
LCP(ν=1.0)	26	0	26	0	26	0	26	0	26	0	27	0

"/" 表示迭代次数超过 1000 次.

例 4. 本例研究一类线性互补问题，直接采用 Lemke 的转轴方法的运算次数是指数次的 [19]. 该问题具有特殊结构： $c=(-1,-1,\cdots,-1)^T$ 及

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$F(x)=Dx+c$. 此例 Harker 和 Pang[6], Harker 和 Xiao[8] 也讨论过. 对 EGM 取初始步长 $s=\sqrt{\eta}/(\sqrt{2}n)$; 对 MEGM 取 $s=\sqrt{2\eta}/(4\sqrt{n})$; 对 NCP 取 $s=\sqrt{\eta}/2$, 这里 n 是问题维数.

取 $\varepsilon^2 = n10^{-14}$, 初始点 $(0, 0, \cdots, 0)$ 时， NCP ($\gamma = 1.95$) 比 LCP ($\gamma = 1.95$ 或 1.0) 慢，即便如此，也比 EGM 及 MEGM 快许多．当换成初始点 (0.6, ⋯, 0.6) 及 (1, 1, ⋯, 1) 时，NCP (γ =1.95) 快于 LCP ($\gamma = 1.95$ 或 1.0)．这里仅列出取初始点 (0, 0, ⋯, 0) 的计算结果．

例 5. 考虑 $F(x) = F_1(x) + F_2(x), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, x_0 = x_{n+1} = 0, F_1(x) = \left(f_1(x), \cdots, f_n(x)\right)^T, F_2(x) = Dx + c$, 其中 $f_i(x) = x_{i-1}^2 + x_i^2 + x_{i-1}x_i + x_i x_{i+1}, i = 1, \cdots, n$, 并且 D, c 与例 3 中的一致．取 $X = [l, u]$, 其中 $l = (0, \cdots, 0)^T$ 及 $u = (1, \cdots, 1)^T$. 对 MEGM 及 NCP 取初始步长 $s = \sqrt{\eta}/4$. 本例取 $\varepsilon^2 = n10^{-14}$, 其中 n 为问题的维数．由表 5 可看出 NCP 比 MEGM 快得多．

表 5. 例 5 取初始点 $x^0 = l$ 的数值结果

算法	迭代次数 (左) 及内部迭代次数 (右)							
	$n = 10$		$n = 20$		$n = 50$		$n = 100$	
MEGM	58	57	60	59	61	60	62	60
NCP(γ=1.95)	14	13	14	13	13	12	13	11
NCP(γ=1.0)	20	19	19	18	19	18	19	17

作者与何炳生博士的有益讨论，使得定理 3.4 的证明得以简化，对此表示感谢．

参 考 文 献

[1] Ahn, Byong-hun, Iterative methods for linear complementarity problem with upperbounds and lowerbounds, *Math. Prog.*, 26(1983), 295–315.

[2] P.H. Calamai, J.J. More, Porjected gradient method for linearly constrained problems, *Math. Prog.*, 39 (1987), 93–116.

[3] B.C. Eaves, On the basic theorem of comlementarity, *Math. Prog.*, 1 (1971), 68–75.

[4] M. Fukushima, Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems, *Math. Prog.*, 53 (1992), 99–110.

[5] E.H. Gafni, D.P. Bertsekas, Two-metric projection methods for constrained optimization, *SIAM J. on Contr. Opti.*, 22 (1984), 936–964.

[6] P.T. Harker, J.S. Pang, A damped-Newton method for linear complementarity problem, in G. Augower and K.Geory, eds., Computational Solutions of Nonlinear Systems of Equations, Lectures in Applied Mathematics, Vol.26(American Mathematical Society, Province, RI, 1990), 265–284.

[7] P.T. Harker, J.S. Pang, Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications, *Math. Prog.*, 48 (1990), 161–220.

[8] P.T. Harker, B. Xiao, Newton's method for the nonlinear complementarity problem: A B-differentiable equation approach, *Math. Prog.*, 48 (1990), 339–357.

[9] B. He, A saddle point algorithm for linear programming, *Shu Xue Banian Kan*, 6 (1989) 4–48.

[10] B. He, J. Stoer, Solution of projection problems over polytopes, *Numer. Math.,* 61 (1992) 73–90.

[11] B. He, A projection and contraction method for a class of linear complementarity problems and its application in convex quadratic programming, *Appl. Math. and Opti.,* 25 (1992) 247–262.

[12] S. Karamardian, Generalized complementarity problems, *JOTA,* 8(1971), 747–756.

[13] S. Karamardian, S. Schaible, Seven kinds of monotone maps, *JOTA,* 66 (1990), 37–46.

[14] M. Kojima, S. Shindo, Extensions of Newton and quasi-Newton methods to systems of PC′ equations, *J. of Oper. Res. Society of Japan,* 29 (1986), 352–374.

[15] G.M. Korpelevich, Ekstragradientnyi method dlia otyskaniia sedlovykh tchek i drugikh zadach, Ekonomika I Matematicheski Metody, 12 (1976) 747–756.

[16] C.E. Lemke, On Complementarity Pivot Theory, in Mathematics of the Decision Sciences, G.B. Dantzig and A.F. Veinott (eds), 1968.

[17] L. Mathiesen, An algorithm based on a sequence of linear complementarity problems applied to a walrasian equilibrium model: An example, *Math. Prog.,* 37 (1987), 1–18.

[18] J.J. More, Coercivity conditions in nonlinear complementarity problems, *SIAM Review,* 16 (1974) 1–16.

[19] K.G. Murty, Linear complementarity, linear and nonlinear programming, Helderman, Berlin, 1988.

[20] J.S. Pang, D. Chan, Iterative methods for variational and complementarity problems, *Math. Prog.,* 24 (1982), 284–313.

[21] D.F. Sun, I. An extragradient method for solving variational inequality problems, Master Thesis, Dept. of Math., Nanjing University, China 1992.

[22] 何炳生，何旭初，一类求解凸规划的鞍点法，计算数学， 1 (1991) 51–57.

[23] E.H. Zarantonello, Projections on convex sets in hilbert space and spectral theory, in E.H. Zarantonello, ed., Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Academic Press, NewYork, 1971.