2019 年 6 月 数值计算与计算机应用 第 40 卷第 2 期
Jun., 2019 Journal on Numerical Methods and Computer Applications Vol.40, No.2

退化情形下高斯 - 赛德尔迭代法的几个问题*1)

陈 亮
(湖南大学数学与计量经济学院, 长沙 410082;
香港理工大学应用数学系, 香港)

孙德锋
(香港理工大学应用数学系, 香港)

卓金全
(新加坡国立大学数学系, 新加坡)

摘 要

高斯 - 赛德尔迭代法是一种经典的求解线性方程组的迭代算法, 它对数值线性代数及数值最优化的发展产生了深远的影响. 本文主要讨论求解系数算子自伴随且半正定但未必正定的线性方程组的 (即退化情形的) 高斯 - 赛德尔迭代法. 我们回顾该算法收敛性分析的发展历史, 并从与线性方程组等价的无约束凸二次规划问题出发, 讨论基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法的收敛性, 从而等价地得出高斯 - 赛德尔迭代法求解这类线性方程组的收敛性. 与此同时, 我们还将讨论与高斯 - 赛德尔迭代法密不可分的对称高斯 - 赛德尔迭代法, 对比两者收敛性分析的异同. 事实上, 这其中的不同之处既促使了本文给出无约束凸二次规划问题分块坐标下降法的收敛性证明, 又为很多相关问题的后续研究提供了动机. 最后, 基于本文内容, 我们将提出一些与之密切相关但尚未解决的问题, 并把它们作为进一步深入研究的对象.

关键词: 高斯 - 赛德尔迭代; 对称高斯 - 赛德尔迭代; 线性方程组; 无约束凸二次规划问题; 分块坐标下降法

MR (2010) 主题分类: 15A06, 90C25, 90C20

SOME PROBLEMS ON THE GAUSS-SEIDEL ITERATION METHOD IN DEGENERATE CASES

Chen Liang
(*College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082, China; Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China*)

Sun Defeng
(*Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China*)

Toh Kim-Chuan
(*Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore*)

* 2018 年 12 月 7 日收到.
1) 基金项目: 国家自然科学基金 (11801158, 11871205) 资助.

Abstract

The Gauss-Seidel iteration method is a highly popular classical iteration algorithm for solving linear systems of equations. It has a profound impact on the development of numerical linear algebra and numerical optimization. In this paper, we mainly discuss the Gauss-Seidel iteration method for solving linear systems of equations associated with self-adjoint and positive semidefinite, but not necessarily positive definite, coefficient operators (i.e., the degenerate case). We will provide a review on the development of the convergence analysis for the Gauss-Seidel method, and discuss the related block coordinate descent method applied to the equivalent unconstrained quadratic programming problems. As a consequence, we derive the convergence of the Gauss-Seidel iteration method for the linear equations we considered in this paper. We also compare the convergence analysis and results of the Gauss-Seidel iteration with the symmetric Gauss-Seidel iteration. The differences observed from this comparison not only motivate the proof provided in this paper, but also pave the way for related research topics in the future. Finally, we highlight some unresolved questions that are highly related to this paper and leave them as future research topics.

Keywords: Gauss-Seidel iteration; Symmetric Gauss-Seidel iteration; Linear system of equations; Unconstrained convex quadratic programming; Block coordinate descent

2010 Mathematics Subject Classification: 15A06, 90C25, 90C20

1. 引 言

高斯 - 赛德尔迭代法 [11, 第 20 节] (包括逐一变量更新和分块变量更新两种方式, 下同) 是一种经典的求解 (变量个数等于方程个数的) 线性方程组的迭代算法1) , 它由 1823 年 Gauss 写给他的学生 Gerling 的信 [8,10] 以及 Seidel 发表于 1874 年的文章 [25] 发展而来, 并对数值线性代数和数值最优化等学科的发展产生了深远的影响.

众所周知, 若线性方程组的系数算子是自伴随且正定的或是严格对角占优的, 则高斯 - 赛德尔迭代法从任意初始点出发产生的点列都收敛到方程组的解. 然而, Gauss 写给 Gerling 的信中讨论的却是求解如下的线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 67 & -13 & -28 & -26 \\ -13 & 69 & -50 & -6 \\ -28 & -50 & 156 & -78 \\ -26 & -6 & -78 & 110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7558 \\ 14604 \\ -22156 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

很明显, 线性方程组 (1.1) 的系数矩阵各行及各列之和均为 0 . 因此, 尽管该矩阵是对称的, 但它既不是对角占优的, 也不是正定的. 事实上, Gauss 的信中并没有证明他所给出的算法的收敛性. 此外, 与人们熟知的高斯 - 赛德尔迭代法不同, Gauss 信中算法的每一步所得到的都是一个近似的整数解, 且选主元 (pivot) 的思想在他信中的算法里也有所体现. 于是, 在忽略非精确计算和选主元这些实际计算中的细节以后, 人们不禁会问: 求解线性方程组 (1.1) 的高斯 - 赛德尔迭代法所产生的点列是否收敛到该方程组的解? 有幸的是, 虽然并不被多数人所悉知, 但这一问题在上世纪六十年代就已经有了肯定的答案 [9, 定理 21.2].

1) 关于求解线性方程组的迭代法的发展历史, 可参考 [4, 12, 13, 24] 等文献及其引文.

事实上, 若所需求解的线性方程组的系数算子自伴随且正定, 则很容易证明高斯 - 赛德尔迭代法的收敛性 [12, 定理 11.2.3]. 同时, 也可以从求解目标函数强凸的无约束凸二次规划问题出发来证明这一结论, 因为这一最优化问题的一阶最优性充要条件恰好是一个系数算子自伴随且正定的线性方程组, 而求解该线性方程组的高斯 - 赛德尔迭代法与求解相应的无约束凸二次规划问题的基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法所产生的点列完全一致, 且后者的收敛性 [28] 也很容易得出. 因此, 对于这样 (目标函数强凸/水平集有界/解唯一) 的无约束二次凸优化问题, 从最优化的角度考虑求解它的基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法, 其结论与从代数的角度去采用高斯 - 赛德尔迭代法求解它的最优性条件 (线性方程组) 是完全相容的. 然而, 当无约束凸二次规划问题的目标函数不再是强凸的 (水平集及解集无界) 时候, 这种相容性的刻画就困难得多. 从数值代数的角度来看, 对于具有自伴随半正定系数算子的线性方程组, 高斯 - 赛德尔迭代法的收敛性在上世纪六十年代就已得证 (详见 [9, 定理 21.2] 以及 [16, 推论 2.1]), 但对于无约束二次凸优化问题, 基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法, 却未曾从最优化问题的角度在不假设强凸性的条件下被证明是收敛的. 此外, [9, 定理 21.2] 以及 [16, 第 3 节] 中的证明均是从代数方程的角度出发的, 深度运用了诸如初等因子、若当标准型等代数工具. 基于上述事实, 我们自然而然地会考虑到如下问题:

问题 1. 能否从最优化问题的角度出发, 不依赖若当标准型等代数工具, 来证明求解无约束凸二次规划问题的基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法所产生点列收敛到问题的解?

在本文中, 我们将围绕问题 1 来讨论求解 (存在多解的) 无约束凸二次规划问题, 并从最优化问题的角度 (从而不依赖如初等因子、若当标准型等代数工具) 来证明相应的基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法的收敛性, 使得对于所有的无约束凸二次规划问题, 基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法的收敛性, 与从代数的角度考虑求解这类问题的最优性条件的高斯 - 赛德尔迭代法完全相容. 事实上, 本文之所以引入这样的基于最优化问题的收敛性分析是因为我们受到了对称高斯 - 赛德尔迭代法最新研究进展 [19] 的启发. 对称高斯 - 赛德尔迭代法是一种与高斯 - 赛德尔迭代法密切相关的求解线性方程组的迭代算法, 它由 Aitken 于 1950 年发表的文章 [1] 中首次提出, 并被 Sheldon [26] 于 1955 年推广为对称超松弛迭代法, 而非精确的对称高斯 - 赛德尔迭代法于 1988 年由 Bank 等 [2] 首次提出提出.

从求解最优化问题的角度来看, 对于无约束凸二次规划问题, 基于对称高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法等价于求解该问题最优性条件方程组的对称高斯 - 赛德尔迭代法. 若此时目标函数是强凸的, 则基于对称高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法的收敛性很容易就能得到, 这与求解相应的最优性条件方程组的对称高斯 - 赛德尔迭代法的收敛性结论 [1, 第 5 节] 恰好是相容的.

但是当目标函数中的二次函数不再是强凸的时候, 这种基于对称高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法产生点列的收敛性可以通过最近 Li 等人提出的对称高斯 - 赛德尔分解定理 [19, 定理 1] 结合邻近点算法的收敛性分析 [22, 23] 来证明. 因此, 对于对称半正定系数算子的线性方程组, 对称高斯 - 赛德尔迭代法产生的点列亦是收敛的, 尽管这一结论尚未从代数问题的角度来证明.

诚然, 单纯从求解自伴随半正定系数算子的线性方程组来看, 本文提出并解决问题 1 只是对已知结果提供了另一种证明思路. 但是, 从求解一般的无约束凸优化问题的角度来看, 问题 1 的解决对分块坐标下降法的进一步研究工作的发展可起到重要的启示作用. 这是因为该问题的解决标志着存在一些凸优化问题 (至少包含了所有的无约束凸二次规划问题), 使得基

于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法从任意的初始点出发所产生的点列都收敛到问题的解 (如果问题的解存在), 无论这些问题中目标函数的水平集是否有界. 事实上, 在不假设水平集有界的前提下, 对于求解一般凸优化问题的基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法, 已有的研究成果仅仅能够在一些条件下证明该算法产生的点列的聚点是问题的解 (如 [3, 命题 2.5] 等), 但目标函数值的收敛性以及算法产生的点列的收敛性均不能够被保证.

事实上, 早在 1957 年, Hildreth [14] 就针对含有非负约束的凸二次规划问题分析了基于高斯 - 赛德尔迭代的坐标下降法的收敛性. 尽管 Hildreth 考虑到了问题有多解的情况, 但遗憾的是, 于同一年, 他在文 [15] 中声明 D'esopo 指出了文 [14, 第 5 节] 中关于多解情况的证明是错误的. 更为遗憾的是, 迄今为止, 求解正则化的凸二次规划问题 (包括仅含非负约束的凸二次规划问题) 的基于高斯 - 赛德尔迭代的 (分块) 坐标下降法在不假设水平集有界的情况下是否收敛仍然是未知的. 虽然对于一些源自线性互补问题的带非负约束的凸二次规划问题, 基于高斯 - 赛德尔迭代的坐标下降法 (被称为投影高斯 - 赛德尔迭代法) 的收敛性可以在不假设水平集有界的情况下得到, 但需要额外地附加一些关于问题目标函数的条件, 详见 [7, 定理 5.3.9]. 与这一情况不同的是, 文 [19] 中的分块对称高斯 - 赛德尔分解定理能够保证对于一类正则化的最小二乘问题, 基于对称高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法是收敛的, 即使不假设水平集有界. 因此, 本文中证明的一个主要目的就是为了促进复合凸二次规划问题的分块坐标下降法的收敛性分析的研究. 此外, 随着问题 1 的解决, 诸多与之相关的问题也自然而然地出现, 在本文中我们将会提出这其中的一些具有实际意义问题作为后续研究的目标.

本文的内容主要如下: 在第 2 节, 我们给出本文所讨论问题的具体形式以及相关的预备知识, 回顾 (对称) 高斯 - 赛德尔迭代法以及相应的分块坐标下降法的已有研究结果, 并根据这些结论成立所需的条件来分析和对比这些结论, 从而说明本文提出并解决问题 1 的必要性. 在第 3 节, 我们将从最优化问题的角度来讨论 (存在多解的) 无约束凸二次规划问题基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法的收敛性. 在第 4 节, 我们将根据本文得到的结论以及相关问题的研究的现状提出一些有待解决的重要问题.

2. 预备知识及已有研究结果

令 $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ 为 n 个有限维希尔伯特空间, 且其中的每个空间 $\mathcal{X}_i$ 均赋有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 及其诱导的范数 $\|\cdot\|$. 令 $\mathcal{X}$ 为这些空间的笛卡尔积, 即 $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$. 对任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, 我们可以记 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_n)$, 其中 $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i, \forall i = 1, \dots, n$. 对任意 $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}$, 我们定义 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle := \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i \rangle$, 以及 $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$.

令 $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 为一个自伴随的半正定线性算子, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1; \dots; \mathbf{b}_n) \in \mathcal{X}$ 为一个给定的向量. 我们考虑如下的线性方程组:

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.1}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ 为未知量.

我们可以将线性算子 $\mathcal{A}$ 在形式上作如下分块

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \cdots & \mathcal{A}_{1n} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \cdots & \mathcal{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{n1} & \mathcal{A}_{n2} & \cdots & \mathcal{A}_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

其中 $\mathcal{A}_{ij}:\mathcal{X}_j\to\mathcal{X}_i, \forall i,j=1,\ldots,n$ 均为线性算子. 由于 $\mathcal{A}$ 是自伴随的, 即 $\mathcal{A}=\mathcal{A}^*$, 进而我们有 $\mathcal{A}_{ij}=\mathcal{A}_{ji}^*$ 以及 $\mathcal{A}_{ii}=\mathcal{A}_{ii}^*, \forall i,j=1,\ldots,n$. 在本文中, 我们对线性方程组 (2.1) 作如下的基本假设.

假设 1. (i) 线性方程组 (2.1) 的解集非空; (ii) 线性算子 $\mathcal{A}$ 的分块 (2.2) 中的所有对角块均为正定的线性算子, 即 $\mathcal{A}_{ii}\succ 0, \forall i=1,\ldots,n$.

2.1. 高斯 - 赛德尔迭代

算法 1. (高斯 - 赛德尔迭代法) 选取任意的 $\mathbf{x}^0\in\mathcal{X}$ 作为初始点, 对 $k=0,1,\ldots$, 按照 $i=1,2,\ldots,n$ 的顺序依次计算

$$\mathbf{x}_i^{k+1}=\mathcal{A}_{ii}^{-1}\left(\mathbf{b}_i-\sum_{j=1}^{i-1}\mathcal{A}_{ij}\mathbf{x}_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}\mathcal{A}_{ij}\mathbf{x}_j^{k}\right).$$

显而易见, 在假设 1 成立的情况下, 算法 1 在求解线性方程组 (2.1) 时, 理论上可以产生一个无穷点列 $\{\mathbf{x}^k\}$. 为方便后文的讨论, 我们记

$$\mathcal{D}:=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_{11} & & & \\ & \mathcal{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{A}_{nn}\end{pmatrix}\quad \text{以及}\quad \mathcal{E}:=-\begin{pmatrix}0 & & & \\ \mathcal{A}_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \mathcal{A}_{n1} & \cdots & \mathcal{A}_{n(n-1)} & 0\end{pmatrix}.$$

从而我们有

$$\mathcal{A}=\mathcal{D}-\mathcal{E}-\mathcal{E}^*, \tag{2.3}$$

且算法 1 产生的序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 满足

$$\mathbf{x}^{k+1}=(\mathcal{D}-\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{E}^*\mathbf{x}^k+\mathbf{b}),\quad \forall k=0,1,\ldots. \tag{2.4}$$

事实上, (2.4) 这种迭代形式属于求解线性方程组 (2.1) 的分裂迭代法中的一种. 所谓分裂迭代法, 如 [12, 第 11.2.3 节] 中所述, 即是将 $\mathcal{A}$ 写成 $\mathcal{A}=\mathcal{M}-\mathcal{N}$, 其中 $\mathcal{M}$ 是一个可逆的线性算子, 进而采用如下迭代格式进行计算

$$\mathbf{x}^{k+1}=\mathcal{M}^{-1}\left(\mathcal{N}\mathbf{x}^k+\mathbf{b}\right). \tag{2.5}$$

显然, 若 $\mathbf{x}^*$ 满足 $\mathcal{A}\mathbf{x}^*=\mathcal{M}\mathbf{x}^*-\mathcal{N}\mathbf{x}^*=\mathbf{b}$, 则有 $\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*=\mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}(\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*)$. 记 $\mathcal{G}:=\mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}$ 并令 $\rho(\mathcal{G})$ 为 $\mathcal{G}$ 的谱半径. 根据 [12, 定理 11.2.1], 迭代格式 (2.5) 所产生的点列在 $\mathcal{A}$ 可逆且 $\rho(\mathcal{G})<1$ 时是收敛的 (此结果对 $\mathcal{A}$ 非自伴随的情况也成立[1)]). 因此, 若 $\mathcal{A}$ 是自伴随且正定的, 则 $\rho((\mathcal{D}-\mathcal{E})^{-1}\mathcal{E}^*)<1$, 从而由迭代 (2.4) 产生的序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 收敛到线性方程组 (2.1) 的解, 详见 [12, 定理 11.2.3]. 另一方面, 根据定义, 对称高斯 - 赛德尔迭代求解线性方程组 (2.1) 时产生的序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 满足

$$\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*=(\mathcal{D}-\mathcal{E}^*)^{-1}\mathcal{E}(\mathcal{D}-\mathcal{E})^{-1}\mathcal{E}^*(\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*),\quad \forall \mathbf{x}^*\in X. \tag{2.6}$$

1) 若线性算子 $\mathcal{A}$ 是严格对角占优或不可约对角占优的 [24, 定义 4.5], 则 $\{\mathbf{x}^k\}$ 收敛到方程组 (2.1) 的解, 详见 [24, 定理 4.9].

当 $\mathcal{A}$ 可逆的时候, 根据文 [1] 中的分析我们可知 $\rho\big((\mathcal{D}-\mathcal{E}^*)^{-1}\mathcal{E}(\mathcal{D}-\mathcal{E})^{-1}\mathcal{E}^*\big)<1$, 从而迭代 (2.6) 所产生的点列也是收敛的.

在退化情形下, $\mathcal{A}$ 仅仅是半正定的时候, $\rho((\mathcal{D}-\mathcal{E})^{-1}\mathcal{E}^*)<1$ 是不一定成立的. 因此, 相应的高斯 - 赛德尔迭代的收敛性分析更为复杂, 需要引入更多的代数工具. Forsythe 和 Wasow 于 1960 年出版的书中 [9, 定理 21.2] 给出了这一情况下求解线性方程组 $\mathcal{A}\mathbf{x}=0$ 的高斯 - 赛德尔迭代法的收敛性分析, 而这一结果被 Keller [16, 第 3 节] 推广到求解更一般的情形 (求解线性方程组 (2.1), 讨论了包括高斯 - 赛德尔迭代法在内的范围更广的算法框架). 其相关结果以本文的数学记号可总结如下.

定理 1. 在假设 1 成立的条件下, 求解线性方程组 (2.1) 的高斯 - 赛德尔迭代法 (算法 1) 从任意初始点出发所产生的点列都收敛到该线性方程组的一个解.

2.2. 对称高斯 - 赛德尔迭代

我们考虑以下无约束凸二次规划化问题

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}\left\{f(\mathbf{x}):=\frac{1}{2}\langle\mathbf{x},\mathcal{A}\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{b},\mathbf{x}\rangle\right\}. \tag{2.7}$$

令 X 为问题 (2.7) 的解集. 在假设 1 成立的前提下, X 是非空的, 且此时 X 是一个单点集或是一个无界闭集. 同时, 我们有

$$\mathcal{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{x}\in X.$$

注 1. 实际上, 很多实际应用中出现的问题 (2.7) 都源自超定或欠定的线性方程组或拟合问题所产生的最小二乘问题. 令 $\mathcal{Y}$ 是一个具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 及其诱导的范数 $\|\cdot\|$ 的有限维希尔伯特空间. 令 $\mathcal{H}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 是一个线性映射且 $\mathbf{c}\in\mathcal{Y}$ 是一个给定的向量. 线性方程组 $\mathcal{H}\mathbf{x}=\mathbf{c}$ 的解或最小二乘逼近解都可以通过如下的最小二乘问题求出:

$$\min_{x\in\mathcal{X}}\frac{1}{2}\|\mathcal{H}\mathbf{x}-\mathbf{c}\|^2. \tag{2.8}$$

由于问题 (2.8) 的目标函数中的常数项不会对问题的最优解造成影响, 因此可认为问题 (2.8) 等同于问题 (2.7), 且此时 $\mathcal{A}:=\mathcal{H}^*\mathcal{H}$ 是自伴随且半正定的, $\mathbf{b}:=\mathcal{H}^*\mathbf{c}\in\mathcal{X}$.

很明显, 问题 (2.7) 是如下的复合凸二次规划问题的一个特殊情形,

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}\left\{\varphi(\mathbf{x}):=p(\mathbf{x}_1)+\frac{1}{2}\langle\mathbf{x},\mathcal{A}\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{b},\mathbf{x}\rangle\right\}, \tag{2.9}$$

其中 $p:\mathcal{X}_1\to(-\infty,+\infty]$ 是一个可能非光滑的正常 (proper) 闭凸函数.

注 2. 事实上, 如同注 1 中所述, 问题 (2.8) (即问题 (2.7)) 通常以线性方程组 $\mathcal{H}\mathbf{x}=\mathbf{c}$ 的最小二乘问题的形式出现, 问题 (2.9) 的一个常见的典型的例子也与最小二乘有关. 令 $\mathcal{K}\in\mathcal{Y}$ 为一个闭凸集, 我们考虑如下的线性可行性问题

$$\mathbf{c}-\mathcal{H}\mathbf{x}\in\mathcal{K},$$

其中 $\mathbf{x}$ 是未知变量. 引入松弛变量 $\mathbf{y}\in\mathcal{Y}$ 后, 这一可行性问题可等价转化为求 $\mathbf{x}\in\mathcal{X}$ 以及 $\mathbf{y}\in\mathcal{Y}$ 使得

$$\mathbf{y}=\mathbf{c}-\mathcal{H}\mathbf{x},\quad \mathbf{y}\in\mathcal{K}.$$

将最小二乘的思想引入后, 我们可以考虑如下的问题

$$\min_{(\mathbf{y},\mathbf{x})}\left\{\delta_{\mathcal{K}}(\mathbf{y})+\frac{1}{2}\|\mathbf{y}+\mathcal{H}\mathbf{x}-\mathbf{c}\|^2\right\}, \tag{2.10}$$

其中 $\delta_{\mathcal{K}}:\mathcal{X}\to[0,\infty]$ 是集合 $\mathcal{K}$ 的指示函数: $\delta_{\mathcal{K}}(\mathbf{y})=0$, 如果 $\mathbf{y}\in\mathcal{K}$, 否则 $\delta_{\mathcal{K}}(\mathbf{y})=+\infty$. 显然, 若将问题 (2.10) 中的变量 $(\mathbf{y},\mathbf{x})$ 看作问题 (2.9) 中的变量 $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$, 前者恰好是后者的一个特例.

接下来我们讨论求解问题 (2.9) 的基于对称高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法. 令假设 1(ii) 成立. 对于任意给定的 $\mathbf{x}\in\mathcal{X}$, 定义映射 $\mathcal{P}(\mathbf{x}):=\mathbf{x}^+=(\mathbf{x}_1^+;\cdots;\mathbf{x}_n^+)$, 其中 $\mathbf{x}_1^+,\ldots,\mathbf{x}_n^+$ 由如下迭代过程产生:

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{x}}_i &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{z}_i\in\mathcal{X}_i}\left\{\varphi(\mathbf{x}_1;\ldots;\mathbf{x}_{i-1};\mathbf{z}_i;\tilde{\mathbf{x}}_{i+1};\cdots;\tilde{\mathbf{x}}_n)\right\}\\ &= \mathcal{A}_{ii}^{-1}\left(\mathbf{b}_i-\sum_{j=1}^{i-1}\mathcal{A}_{ij}\mathbf{x}_j-\sum_{j=i+1}^{n}\mathcal{A}_{ij}\tilde{\mathbf{x}}_j\right), \qquad i=n,\ldots,2;\\ \mathbf{x}_1^+ &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{z}_1\in\mathcal{X}_1}\left\{\varphi(\mathbf{z}_1;\tilde{\mathbf{x}}_2;\cdots;\tilde{\mathbf{x}}_n)\right\};\\ \mathbf{x}_i^+ &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{z}_i\in\mathcal{X}_i}\left\{\varphi(\mathbf{x}_1^+;\ldots;\mathbf{x}_{i-1}^+;\mathbf{z}_i;\tilde{\mathbf{x}}_{i+1};\cdots;\tilde{\mathbf{x}}_n)\right\}\\ &= \mathcal{A}_{ii}^{-1}\left(\mathbf{b}_i-\sum_{j=1}^{i-1}\mathcal{A}_{ij}\mathbf{x}_j^+-\sum_{j=i+1}^{n}\mathcal{A}_{ij}\tilde{\mathbf{x}}_j\right), \qquad i=2,\ldots,n.\end{cases} \tag{2.11}$$

对于如上定义的映射 $\mathcal{P}$, 文 [19, 定理 1] 给出了如下的对称高斯 - 赛德尔分解定理.

定理 2. 在假设 1(ii) 成立的条件下, 映射 $\mathcal{P}$ 满足

$$\mathcal{P}(\mathbf{x})=\operatorname{argmin}_{\mathbf{z}\in\mathcal{X}}\left\{\varphi(\mathbf{z})+\frac{1}{2}\|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|_{\mathcal{T}}^2\right\},\quad \forall\mathbf{x}\in\mathcal{X},$$

其中自伴随且半正定的线性算子 $\mathcal{T}:=\mathcal{E}^*\mathcal{D}^{-1}\mathcal{E}$ 满足 $\mathcal{A}+\mathcal{T}\succ 0$, 以及 $\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{T}}^2:=\langle\mathbf{z},\mathcal{T}\mathbf{z}\rangle$.

注 3. 事实上, 与本文列出的定理 2 相比, [19, 定理 1] 有着更为一般的形式. 后者允许 (2.11) 中的这些子问题可以被非精确地求解, 并完整地刻画了一圈循环后的整体误差与每一步子问题求解的误差之间的关系. 最近的一些研究结果表明, [19, 定理 1] 在设计求解多块的复合凸优化问题的分块坐标下降法或基于增广拉格朗日函数的乘子法及交替方向乘子法中起到了关键作用, 详见文 [5,6,17,18,20,27,29] 等.

当问题 (2.9) 中 $p(\mathbf{_1})\equiv\mathbf{0}$ 时, 即所求解的问题是 (2.7) 的时候, (2.11) 中 $\mathbf{x}_1^+$ 可由下式得出:

$$\mathbf{x}_1^+=\mathcal{A}_{11}^{-1}\big(\mathbf{b}_1-\sum_{j=2}^{n}\mathcal{A}_{1j}\tilde{\mathbf{x}}_j\big).$$

从而根据 (2.11) 以及对称高斯 - 赛德尔的迭代公式 (2.6) 可知, 对于问题 (2.7) 的任意一个解 $\mathbf{x}^*\in\mathcal{X}$ 以及任意的 $\mathbf{x}\in\mathcal{X}$ 都有

$$\mathcal{P}(\mathbf{x})-\mathbf{x}^*=(\mathcal{D}-\mathcal{E}^*)^{-1}\mathcal{E}(\mathcal{D}-\mathcal{E})^{-1}\mathcal{E}^*(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*).$$

关于求解线性方程组 (2.1) 的对称高斯 - 赛德尔迭代法的收敛性, 我们有如下结论.

定理 3. 在假设 1 成立的情况下, 求解线性方程组 (2.1) 的对称高斯 - 赛德尔迭代法从任何初始点出发, 所产生的点列都收敛到该线性方程组的一个解.

证明. 由于求解线性方程组 (2.1) 的对称高斯 - 赛德尔迭代法等价于求解问题 (2.7) 的基于对称高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法, 我们只需证明后者的收敛性. 这种收敛性可以由定理 2 结合邻近点算法的收敛性分析得到. 由于这一证明的过程仅仅是循规蹈矩,[1] 此处我们不再赘述. □

3. 基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法

若假设 1 成立, 求解最优化问题 (2.7) 的基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法和求解线性方程组 $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的高斯 - 赛德尔迭代法均是良定 (well-defined) 的, 且从相同的初始点 $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{X}$ 出发, 这两种算法所产生的点列完全相同. 因而我们可以将这两种算法视为同一种方法. 所需注意的是, [9, 定理 21.2] 以及 [16, 第 3 节] 中给出的高斯 - 赛德尔迭代法的收敛性证明都是从代数方程的角度出发的, 使用了诸如初等因子、若当标准型等代数工具. 但与之截然不同的是, 如上一节所述, 已有的对称高斯 - 赛德尔迭代法 (2.6) 的收敛性证明却是从最优化问题的角度出发的. 在这一节, 我们将从最优化问题的角度证明算法 1 求解问题 (2.7) 时产生的点列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 的收敛性. 与已有的求解凸优化问题的分块坐标下降法的收敛性分析相比, 本文的收敛性证明不需要假设目标函数的水平集有界. 同时, 所需再次强调的是, 与已有的求解对称半正定系数算子的线性方程组的高斯 - 赛德尔迭代的收敛性分析相比, 本文的证明不依赖于初等因子、若当标准型等代数工具.

对于任意给定的 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, 我们记 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{x}\rangle}$ 以及 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{D}} := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathcal{D}\mathbf{x}\rangle}$. 我们首先给出后续证明会常用到的一个等式:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\tilde{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle - \frac{1}{2}\langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{A}\tilde{\mathbf{x}}\rangle + \langle \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{x}}\rangle \\ &= \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{A}}^2 + \langle \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

接下来, 我们开始分步证明本文的主要结论.

引理 1. 若假设 1 成立, 则算法 1 产生的序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 满足

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{b} = \mathcal{E}^*(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}), \quad \forall k \geq 0, \tag{3.2}$$

以及

$$f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k+1}) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|_{\mathcal{D}}^2, \quad \forall k \geq 0. \tag{3.3}$$

证明. 由于算法 1 产生的序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 满足 (2.4), 我们有 $(\mathcal{D} - \mathcal{E})\mathbf{x}^{k+1} = \mathcal{E}^*\mathbf{x}^k + \mathbf{b}$, 从而根据 (2.3) 可知 (3.2) 成立. 将 (3.2) 代入 (3.1), 并利用 $\mathcal{A} = \mathcal{D} - \mathcal{E} - \mathcal{E}^*$ 即可得到

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k+1}) \\ &= \frac{1}{2}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|_{\mathcal{A}}^2 + \langle \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}, \mathcal{E}^*(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1})\rangle \\ &= \frac{1}{2}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|_{\mathcal{A}}^2 + \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}, \mathcal{E}^*(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1})\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}, \mathcal{E}(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1})\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}, \mathcal{D}(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1})\rangle. \end{aligned}$$

[1] 事实上, 这一证明过程几乎都是在重复文 [22, 23] 中的证明.

从而 (3.3) 成立, 即得证. □

命题 1. 若假设 1 成立, 则算法 1 产生的序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 满足:

(i) $f(\mathbf{x}^k)$ 收敛到问题 (2.7) 的极小值 $f_{\min}$, 且收敛速度是 R- 线性的, 即存在两个常数 $\varrho > 0$ 以及 $\sigma \in (0,1)$ 使得
$$f(\mathbf{x}^{k+1}) - f_{\min} \le \varrho\sigma^k \left(f(\mathbf{x}^0) - f_{\min}\right).$$

(ii) 序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 是有界的.

证明. 由于 $\mathcal{A}$ 是自伴随半正定的线性算子, 令 d 为 $\mathcal{A}$ 的全部非零特征值的个数. 由谱分解定理可知存在线性算子 $\mathcal{U} : \mathbb{R}^d \to \mathcal{X}$ 以及非奇异且非负的对角矩阵 $\Lambda \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 使得
$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{U}(\Lambda\mathcal{U}^*\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \\ \mathcal{U}^*\mathcal{U}\mathbf{d} = \mathbf{d}, & \forall \mathbf{d} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.4}$$
我们可以将 Λ 表示成 $\Lambda = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ 为 Λ 的依次排列的对角元. 从而我们可以定义 $\Lambda^{1/2} = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_d}) \succ 0$ 使得 $\Lambda = \Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}$. 同时, 我们定义 $\Lambda^{-1/2} := (\Lambda^{1/2})^{-1}$.

对任意的 $\mathbf{x}^* \in X$, 我们有 $\mathcal{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$. 因此, 由 (3.1) 可知对任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ 以及 $\mathbf{x}^* \in X$ 我们都有
$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) &= \frac{1}{2}\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \mathcal{U}(\Lambda\mathcal{U}^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \Lambda^{1/2}\mathcal{U}^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \Lambda^{1/2}\mathcal{U}^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\rangle = \frac{1}{2}\|\Lambda^{1/2}\mathcal{U}^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\|^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$
由 (3.4) 结合引理 1 中的 (3.2) 可得
$$\mathcal{U}(\Lambda\mathcal{U}^*(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*)) = \mathcal{E}^*(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}),$$
进而我们有
$$\Lambda^{1/2}\mathcal{U}^*(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*) = \Lambda^{-1/2}\mathcal{U}^*\mathcal{E}^*(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}).$$
由此结合 (3.5) 可知, 对任意 $\mathbf{x}^* \in X$,
$$f(\mathbf{x}^{k+1}) - f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2}\|\Lambda^{-1/2}\mathcal{U}^*\mathcal{E}^*(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1})\|^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2_{\mathcal{O}}, \tag{3.6}$$
其中, 自伴随且半正定的线性算子 $\mathcal{O} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 以及 $\|\cdot\|_{\mathcal{O}} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ 定义为
$$\mathcal{O}\mathbf{x} =: \mathcal{E}(\mathcal{U}\Lambda^{-1}\mathcal{U}^*(\mathcal{E}^*\mathbf{x})), \quad \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{O}} := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathcal{O}\mathbf{x}\rangle}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X},$$
根据引理 1 中 (3.3) 以及 (3.6) 我们可知对任意 $\mathbf{x}^* \in X$ 以及 $k \ge 0$,
$$\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2_{\mathcal{O}} = f(\mathbf{x}^{k+1}) - f(\mathbf{x}^*) \ge \frac{1}{2}\sum_{t=k+1}^{\infty}\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^{t+1}\|^2_{\mathcal{D}}. \tag{3.7}$$
令 $\lambda_{\max}(\mathcal{O})$ 为 $\mathcal{O}$ 的最大的特征值, 并且令 $\lambda_{\min}(\mathcal{D})$ 为 $\mathcal{D}$ 的最小特征值. 显然, $\lambda_{\max}(\mathcal{O}) > 0$ 以及 $\lambda_{\min}(\mathcal{D}) > 0$. 因此,
$$\varrho' := \frac{\lambda_{\max}(\mathcal{O})}{\lambda_{\min}(\mathcal{D})} > 0, \quad \sigma := \frac{\varrho'}{1+\varrho'} \in (0,1), \quad \varrho := \frac{\varrho'}{1-\sigma} > 0, \tag{3.8}$$

根据 (3.7) 以及 (3.8) 我们可知

$$\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k+1}\|^2 \geq \frac{1}{\varrho'}\sum_{t=k+1}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2, \quad \forall k\geq 0.$$

因此, 对任意的 $k\geq 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{t=k}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2 &= \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k+1}\|^2+\sum_{t=k+1}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2\\ &\geq \frac{1+\varrho'}{\varrho'}\sum_{t=k+1}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2=\frac{1}{\sigma}\sum_{t=k+1}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2.\end{aligned}$$

从而可得

$$\sum_{t=k+1}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2\leq\sigma\sum_{t=k}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2\leq\sigma^k\sum_{t=1}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2, \tag{3.9}$$

且有

$$\sum_{t=1}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2\leq\sigma\sum_{t=0}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2.$$

进而我们有

$$\sum_{t=1}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2\leq\frac{\sigma}{(1-\sigma)}\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|^2.$$

将上式代入 (3.9) 即可得到

$$\sum_{t=k+1}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2\leq\frac{\sigma^{k+1}}{1-\sigma}\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|^2.$$

进而我们有

$$\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k+1}\|^2\leq\sum_{t=k}^{\infty}\|\mathbf{x}^t-\mathbf{x}^{t+1}\|^2\leq\frac{\sigma^k}{1-\sigma}\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|^2. \tag{3.10}$$

(i) 一方面, 由 (3.6) 以及 (3.10) 可知对任意 $\mathbf{x}^*\in X$,

$$f(\mathbf{x}^{k+1})-f(\mathbf{x}^*)=\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k+1}\|_{\mathcal{O}}^2\leq\frac{\lambda_{\max}(\mathcal{O})}{2}\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k+1}\|^2\leq\frac{\lambda_{\max}(\mathcal{O})}{2}(1-\sigma)\sigma^k\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|^2.$$

另一方面根据引理 1 中 (3.3) 可知对任意 $\mathbf{x}^*\in X$,

$$f(\mathbf{x}^0)-f(\mathbf{x}^*)\geq\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k+1}\|_{\mathcal{D}}^2\geq\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|_{\mathcal{D}}^2\geq\frac{\lambda_{\min}(\mathcal{D})}{2}\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|^2.$$

由上面两式结合 (3.8) 中 ϱ 的定义可得

$$f(\mathbf{x}^{k+1})-f(\mathbf{x}^*)\leq\varrho\sigma^k\left(f(\mathbf{x}^0)-f(\mathbf{x}^*)\right), \quad \forall\mathbf{x}^*\in X.$$

由于 $f(\mathbf{x}^k)\geq f(\mathbf{x}^*)$, $\forall k\geq 0$, 从而 $\lim_{k\to\infty}f(\mathbf{x}^k)=f_{\min}=f(\mathbf{x}^*)$, 即 (i) 得证.

(ii) 由 (3.10) 可得

$$\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k+1}\|\leq(\sqrt{\sigma})^k\frac{\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|}{\sqrt{1-\sigma}}.$$

因此, 对任意的 $k \geq 0$,

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0\| \leq \sum_{t=0}^{k-1} \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^{t+1}\| \leq \sum_{t=1}^{k} (\sqrt{\sigma})^{t-1} \frac{\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1\|}{\sqrt{1-\sigma}} \leq \frac{1}{1-\sqrt{\sigma}} \frac{\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1\|}{\sqrt{1-\sigma}}. \tag{3.11}$$

从而命题得证. □

定理 4. 若假设 1 成立, 则算法 1 产生的点列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 收敛到问题 (2.7) 的一个解.

证明. 根据命题 1(i) 可得 $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^k) = f_{\min}$. 由于 f 是连续函数, 序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 的任意一个聚点都是问题 (2.7) 的解. 根据命题 1(ii) 我们知道算法 1 产生的点列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 是有界的. 因此, 该点列有至少一个收敛的子列, 且收敛到问题 (2.7) 的某个解 $^\infty$. 假设序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 存在另一个子列且收敛到另一个聚点 $\tilde{\mathbf{x}}^\infty \neq \mathbf{x}^\infty$. 我们记

$$\varepsilon := \|\mathbf{x}^\infty - \tilde{\mathbf{x}}^\infty\| > 0.$$

由于 $\lim_{k\to\infty}(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}) = 0$ 且存在 $\{\mathbf{x}^k\}$ 的子列收敛到 $\mathbf{x}^\infty$, 一定存在某个充分大的正整数 K 使得

$$\|\mathbf{x}^K - \mathbf{x}^{K+1}\| \leq \frac{\varepsilon(1-\sqrt{\sigma})\sqrt{1-\sigma}}{4} \quad \text{以及} \quad \|\mathbf{x}^K - \mathbf{x}^\infty\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

我们可以将 $\mathbf{x}^K$ 视为算法余下迭代的初始点. 根据命题 1 的证明中的 (3.11) 我们可知, 对于任意的 $s \geq 0$,

$$\|\mathbf{x}^{K+s} - \mathbf{x}^K\| \leq \frac{1}{1-\sqrt{\sigma}\frac{\|\mathbf{x}^{K+1}-\mathbf{x}^K\|}{\sqrt{1-\sigma}}} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

因此, 对任意的 $s \geq 0$ 都有

$$\|\mathbf{x}^{K+s} - \mathbf{x}^\infty\| \leq \|\mathbf{x}^{K+s} - \mathbf{x}^K\| + \|\mathbf{x}^K - \mathbf{x}^\infty\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此可知, 对任意的 $k \geq K$ 都有 $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^\infty\| \leq \varepsilon/2$, 从而由 $\|\mathbf{x}^\infty - \tilde{\mathbf{x}}^\infty\| = \varepsilon$ 可知 $\|\mathbf{x}^k - \tilde{\mathbf{x}}^\infty\| \geq \varepsilon/2$. 因此 $\tilde{\mathbf{x}}^\infty$ 不再可能是序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 的一个聚点, 这与 $\tilde{\mathbf{x}}^\infty$ 是聚点的假设相矛盾. 从而定理得证. □

4. 有待解决的问题

本节我们将就本文第 2、3 节中所述的内容, 结合相关问题研究的现状提出一些有待解决的问题.

首先, 在本文第 3 节中, 求解问题 (2.7) 的高斯 - 赛德尔迭代算法 1 中所有的子问题都是精确求解的, 而 [19, 定理 1] 却允许对称高斯 - 赛德尔迭代法的子问题非精确求解. 因此, 基于本文第 2 节中的背景知识以及第 3 节中的定理 4, 人们很容易会联想到如下的问题:

问题 2. 能否设计一定的误差容许条件, 使得算法 1 中的子问题可以非精确求解, 且定理 4 中的收敛性结论仍然成立?

其次, 从求解无约束凸二次规划问题 (2.7) 的角度来看, [19, 命题 2(b)] 给出了基于分块对称高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法的迭代复杂性分析, 且 [19, 命题 2(a)] 还证明了这一算法可以与 Nesterov 的加速技巧 [21] 相结合, 将迭代的复杂性由 $O(\frac{1}{k})$ 提升至 $O(\frac{1}{k^2})$, 其中 k 是迭代步数. 鉴于这些事实, 从使用算法 1 求解问题 (2.7) 的角度来看, 可提出如下问题:

问题 3. 算法 1 的迭代复杂性如何确立? 能否利用这种复杂性分析结合加速的技巧来提高算法的效率? 与此同时, 能否依然允许子问题被非精确求解?

最后, 本文第 3 节及以上两个问题都是针对求解问题 (2.7) 的. 尽管这一问题本身是一类重要的凸优化问题, 但越来越多的实际应用中得到的问题模型皆是有如下形式的复合凸二次规划化问题

$$\min_{x\in\mathcal{X}}\left\{g(\mathbf{x}):=\sum_{i=1}^{n}p_i(\mathbf{x}_i)+\frac{1}{2}\langle\mathbf{x},\mathcal{A}\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{b},\mathbf{x}\rangle\right\},\tag{4.1}$$

其中 $p_i:\mathbf{x}_i\to(-\infty,\infty]$, $i=1,\dots,n$ 是 n 个正常的闭凸函数. 在不假设问题 (4.1) 的水平集有界时, 基于高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法产生点列的收敛性在当前来看仍然是未知的. 事实上, 这种未知性也是促使本文提出问题 1 并证明定理 4 的一个主要原因. 为此, 我们提出以下有待研究和解决的问题:

问题 4. 假设问题 (4.1) 的解存在, 并令假设 1 成立. 那么, 在不假设问题 (4.1) 的水平集有界的情况下, 对于基于分块 (对称) 高斯 - 赛德尔迭代的分块坐标下降法:

(1) 能否证明算法产生的点列的收敛性?

(2) 算法的收敛性需要函数 p_i, $i=1,\dots,n$ 满足什么样的条件?

(3) 能否得到算法迭代复杂性分析的结果?

(4) 能否允许子问题非精确求解?

(5) 能否引入加速技巧来大幅度改善算法迭代的复杂性?

(6) 对于引入加速技巧后的算法, 能否保证其产生点列的收敛性?

参 考 文 献

[1] Aitken A. IV. Studies in practical mathematics; V. On the iterative solution of a system of linear equations[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematical and Physical Sciences, 1950, 63(1): 52–60.

[2] Bank R E, Dupont T F, Yserentant H. The hierarchical basis multigrid method[J]. Numerische Mathematik, 1988, 52: 427–458.

[3] Bertsekas D P, Tsitsiklis J N. Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods[M]. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1989.

[4] Chabert J L. A History of Algorithms[M]. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1999.

[5] Chen L, Sun D F, Toh K C. An efficient inexact symmetric Gauss-Seidel based majorized ADMM for high-dimensional convex composite conic programming[J]. Mathematical Programming, 2017, 161(1-2): 237–270.

[6] Chen L, Sun D F, Toh K C. On the equivalence of inexact proximal ALM and ADMM for a class of convex composite programming [OL]. arXiv:1803.10803, 2018.

[7] Cottle R W, Pang J S, Stone R E. The Linear Complementarity Problem[M]. Philadelphia, PA, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[8] Forsythe G E. Gauss to Gerling on relaxation[J]. Mathematical Tables and Other Aids to Computation, 1951, 5: 255–258.

[9] Forsythe G E, Wasow W R. Finite Difference Methods for Partial Differential Equations[M]. New York, John Wiley, 1960.

[10] Gauss C F. Brief an Gerling (1823). In: Werke, Vol. 9[G]. Königliche Gesellschaft der Wissenschaft, Göttingen, 1903. Reprint by Georg Olms, Hildesheim, 1981.

[11] Gauss C F. Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae (1826). In: Werke, Vol. 4[G]. pp. 55–93. Königliche Gesellschaft der Wissenschaft, Göttingen (1873). Reprint by Georg Olms, Hildesheim, 1981.

[12] Golub G H, Van Loan C F. Matrix Computations, 4th Edition[M]. Johns Hopkins University Press, 2013.

[13] Hackbusch W. Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations[M]. Heidelberg, NY, Springer-Verlag, 1994.

[14] Hildreth C. A quadratic programming procedure[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1957, 4(1): 79–85.

[15] Hildreth C. Notes [J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1957, 4(4): 361.

[16] Keller H B. On the solution of singular and semidefinite linear systems by iteration[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (Series B, Numerical Analysis), 1965, 2(2): 281–290.

[17] Lam X Y, Marron J S, Sun D F, Toh K C. Fast algorithms for large scale generalized distance weighted discrimination[J]. Journal of Computational and Graphical Statistics, 2018, 27: 368–379.

[18] Li X D, Sun D F, Toh K C. A Schur complement based semi-proximal ADMM for convex quadratic conic programming and extensions[J]. Mathematical Programming, 2016, 155: 333-373.

[19] Li X D, Sun D F, Toh K C. A block symmetric Gauss-Seidel decomposition theorem for convex composite quadratic programming and its applications[J]. Mathematical Programming, 2018, online, DOI: 10.1007/s10107-018-1247-7.

[20] Li X D, Sun D F, Toh K C. QSDPNAL: A two-phase augmented Lagrangian method for convex quadratic semidefinite programming[J]. Mathematical Programming Computation, 2018, 10: 703–743.

[21] Nesterov Y. A method of solving a convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$[J]. Soviet Mathematics Doklady, 1983, 27(2): 372–376.

[22] Rockafellar R T. Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming[J]. Mathematics of Operations Research, 1976, 1(2): 97–116.

[23] Rockafellar R T. Monotone operators and the proximal point algorithm[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1976, 14(5): 877–898.

[24] Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2nd Edition[M]. Philadelphia, PA, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

[25] Seidel L. Ueber ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen[C]. Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1874, Band 11, III: 81–108.

[26] Sheldon J W. On the numerical solution of elliptic difference equations[J]. Mathematics of Computation, 1955, 9: 101–112.

[27] Sun D F, Toh K C, Yang L Q. An efficient inexact ABCD method for least squares semidefinite programming[J]. SIAM Journal on Optimization, 2016, 26: 1072–1100.

[28] Warga J. Minimizing certain convex functions[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, 11(3): 588–593.

[29] Xiao Y H, Chen L, Li D H. A generalized alternating direction method of multipliers with semi-proximal terms for convex composite conic programming[J]. Mathematical Programming Computation, 2018, 10: 533–555.