中国科学: 数学 2014 年 第 44 卷 第 5 期: 423～434
link.springer.com math.scichina.com

热方程的一些端点估计及其在 Navier-Stokes 方程中的应用

献给陆善镇教授 75 华诞

曹政子, 李步扬, 孙永忠*

南京大学数学系, 南京 210093
E-mail: caozhengzi@163.com, buyangli@nju.edu.cn, sunyz@nju.edu.cn

收稿日期: 2013-10-07; 接受日期: 2013-12-17; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11171145 和 11301262) 资助项目

摘要 本文首先讨论热方程初值问题的解在 Hardy、BMO (bounded mean oscillation) 和 Besov 型空间中的估计. 然后本文结合 Coifmann-Lions-Meyer-Semmes 在 Hardy 空间中的补偿紧性结果, 给出 Navier-Stokes 方程整体弱解的二阶导数的一些端点估计.

关键词 Hardy 空间 BMO 空间 Besov 空间 热方程 Navier-Stokes 方程

MSC (2010) 主题分类 42B35, 35K15, 35Q30

1 引言

关于高维空间 $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ 上的 Hardy 空间 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ 及其对偶空间 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 的理论, 是 20 世纪六七十年代实调和分析发展的一个里程碑式的工作 [1–4]. 这些看起来是纯调和分析的结果, 却往往会在非线性偏微分方程的研究中起到作用, 最典型的莫过于文献 [5, 定理 II.1] 中的一个关于补偿紧性的结果:

定理 1.1 假设 $\boldsymbol{u} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{v} \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $q \in (1, \infty)$ 且在分布意义下满足

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0, \quad \mathrm{curl}\boldsymbol{v} = 0, \tag{1.1}$$

则 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ 且存在一个仅依赖于 n 和 q 的常数 C 使得

$$\|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant C\|\boldsymbol{u}\|_{L^q}\|\boldsymbol{v}\|_{L^{q'}}. \tag{1.2}$$

本文中, 向量 (函数) 用黑斜体字母表示, 而在一个空间的记号中, 在不致混淆的情况下, 我们总是省略掉默认的底空间 $\mathbb{R}^n$. 作为诸多应用中的一个, 上述文章中最后证明了 n $(\geqslant 2)$ 维空间中不可压缩 Navier-Stokes 方程初值问题

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = 0, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{u}(0, x) = \boldsymbol{u}_0(x) \tag{1.3}$$

的整体弱解 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ 的一个性质, 即下面的定理:

英文引用格式: Cao Z Z, Li B Y, Sun Y Z. Some endpoint estimates for heat equation with application to Navier-Stokes equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 423–434, doi: 10.1360/N012013-00156

定理 1.2 [5, 定理 IX.1] 设 $\boldsymbol{u}_0 \in L^2$, $\mathrm{div}\boldsymbol{u}_0 = 0$, 则 Navier-Stokes 方程的整体弱解 $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,\infty;L^2) \cap L^2(0,\infty;\dot{H}^1)$ 有如下性质:

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}, \nabla p \in L^2(0,\infty;\mathcal{H}^1), \quad \partial_i\boldsymbol{u}\cdot\nabla u_j\bigg(=\sum_{k=1}^n \partial_i u_k \partial_k u_j\bigg), \partial_{ij}p \in L^1(0,\infty;\mathcal{H}^1), \quad i,j=1,2,\ldots,n,$$

且存在与 $\boldsymbol{u}_0$ 无关的常数使得

$$\|\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}, \nabla p\|_{L^2(0,\infty;\mathcal{H}^1)} \leqslant C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^2, \tag{1.4}$$

$$\|\partial_i\boldsymbol{u}\cdot\nabla u_j, \partial_{ij}p\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{H}^1)} \leqslant C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^2. \tag{1.5}$$

定理 1.2 也可参见文献 [6, 定理 3.6]. 上述关于 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$ 和 $\partial_i\boldsymbol{u}\cdot\nabla u_j$ 的结果, 从定理 1.1 即可得出. 而对压力 p 的估计, 从

$$-\Delta p = \mathrm{div}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i u_j \partial_j u_i \tag{1.6}$$

及奇异积分的 $\mathcal{H}^1$ 有界性即得. 由此, 注意到

$$\partial_t\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nabla p \tag{1.7}$$

的右端项属于 $L^2(0,\infty;\mathcal{H}^1)$, Lions [6, 第 99 页] 进一步问到: 是否有

$$\partial_t\boldsymbol{u}, \nabla^2\boldsymbol{u} \in L^2(0,\infty;\mathcal{H}^1)?$$

Lions 指出, 若对 $\mathbb{R}^3\times(0,\infty)$ 中的热方程的零初值问题

$$\partial_t v - \Delta v = f, \quad v(0,x) = 0 \tag{1.8}$$

有相应估计

$$\|\partial_t v, \nabla^2 v\|_{L^2(0,\infty;\mathcal{H}^1)} \leqslant C\|f\|_{L^2(0,\infty;\mathcal{H}^1)}, \tag{1.9}$$

则马上可得上述结果. 上述估计式 (1.9) 可以理解为一种时空混合型的端点估计. 就我们所知, 这样的估计对热方程是未知的. 我们知道对零初值问题的热方程 (1.8) 而言, 有如下的 L^q-L^r 时空混合型估计:

$$\|\partial_t v, \nabla^2 v\|_{L^q(0,\infty;L^r)} \leqslant C\|f\|_{L^q(0,\infty;L^r)}, \quad q,r\in(1,\infty). \tag{1.10}$$

这些结果可经由解的具体表达式通过热核或抛物型奇异积分 [7,8] 的估计来证明, 参见文献 [9–11] 等. 我们知道, 若将 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\}$ 视为赋予抛物距离及乘积测度 $dxdt$ 的 Coifmann-Weiss [14] 意义下的齐型空间, 可以类似定义其上的抛物型 Hardy 和 BMO 空间并证明抛物型奇异积分在其上的有界性, 从而得到热方程解的二阶导数在这类端点空间上的估计. 由于本文不涉及这类抛物型端点空间, 故不再赘述. 有兴趣的读者可参见文献 [12–14] 以及最近与一般二阶抛物型方程有关的工作 [15,16] 等. 关于联系于一般算子 L (相应于 $-\Delta$) 的 Hardy 和 BMO 空间的最新进展, 可参见 Duong 和 Yan 的工作 [17,18].

基于上述 Lions 的问题, 本文首先引进和给出热方程在经典 Hardy、BMO 和 Besov 空间中的几类时空混合型端点估计. 利用这些估计, 我们在三维情形给出 Lions 问题在 Besov 型空间中的一个替代回答, 并在二维情形解决 Lions 关于 Navier-Stokes 方程的问题. 至于 Lions 的原始问题, 本文并没有得到完全解决.

2 记号及预备知识

设 $\phi(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负不恒为零的速降函数. 对 $t>0$, 记 $\phi_t(x)=t^{-n}\phi(t^{-1}x)$. 对 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数 $f(x)$, 定义其极大函数

$$\mathcal{M}_\phi(f)(x)=\sup_{t>0}|\phi * f(x)|.$$

定义 Hardy 空间

$$\mathcal{H}^1=\{f\in L^1 \mid \mathcal{M}_\phi f\in L^1\},\quad \|f\|_{\mathcal{H}^1}=\|\mathcal{M}_\phi f\|_{L^1},$$

且这样的定义与 ϕ 的选取无关. 记 B 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个球, 对 $f\in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$f_B=\int_B f(x)dx,$$

则 $\mathcal{H}^1$ 的对偶 — 有界平均振荡空间 BMO 是满足如下条件局部可积函数构成的空间:

$$\|f\|_{\rm BMO}:=\sup_B\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-f_B|dx<\infty,$$

其中 $|B|$ 表示球 B 的 Lebesgue 测度, 而 sup 取遍 $\mathbb{R}^n$ 中所有的球. 上述半范 $\|\cdot\|_{\rm BMO}$ 在模去一个常数的意义下是 BMO 上的范数.

Hardy 空间可用 Riesz 变换来刻画. 记 R_k, $k=1,2,\ldots,n$ 为 Riesz 变换, 则 $f\in\mathcal{H}^1$ 当且仅当 $f\in L^1$, $R_kf\in L^1$ 且存在常数 $C\geqslant c>0$ 使得

$$c\|f\|_{\mathcal{H}^1}\leqslant\|f\|_{L^1}+\sum_{K=1}^n\|R_kf\|_{L^1}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{H}^1}.$$

事实上, $R_kf\in\mathcal{H}^1$ 且

$$\|R_kf\|_{\mathcal{H}^1}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{H}^1},\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Hardy 空间也可用 Littlewood-Paley 平方函数来刻画[4,19]. 令光滑可积函数 $\psi(x)$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)dx=0,\quad |\psi(x)|\leqslant\frac{C}{(1+|x|)^{n+1}},\quad |\nabla\psi(x)|\leqslant\frac{C}{(1+|x|)^{n+2}}.$$

对局部可积函数 f 定义其 Littlewood-Paley 平方函数

$$g_\psi(f)(x)=\left(\int_0^\infty|\psi_t*f(x)|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $f\in\mathcal{H}^1$ 当且仅当 $g(f)\in L^1$ 且存在常数 $C\geqslant c>0$ 使得

$$c\|f\|_{\mathcal{H}^1}\leqslant\|g_\psi(f)\|_{L^1}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{H}^1}.$$

我们知道, 上述平方函数刻画也有离散型的版本, 即用 Littlewood-Paley 二进分解来刻画. 为此, 令 $\chi(\xi)$ 是支集为 $\{|\xi|\leqslant\frac{4}{3}\}$ 而 $\varphi(\xi)$ 为支于环 $\{\frac{3}{4}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{8}{3}\}$ 的光滑函数, 且满足

$$\chi(\xi)+\sum_{j=0}^\infty\varphi(2^{-j}\xi)=1,\quad\forall\,\xi\in\mathbb{R}^n;\quad \sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi(2^{-j}\xi)=1,\quad \frac{1}{2}\leqslant\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi^2(2^{-j}\xi)\leqslant1,\quad\forall\,\xi\neq0.$$

易见

$$\mathrm{supp}\varphi(2^{-j}\cdot)\cap\mathrm{supp}\varphi(2^{-k}\cdot)=\emptyset,\quad |j-k|\geqslant 2,\quad \mathrm{supp}\chi(\cdot)\cap\mathrm{supp}\varphi(2^{-j}\cdot)=\emptyset,\quad j\geqslant 1.$$

记 $h=\mathcal{F}^{-1}\varphi$ 和 $\tilde{h}=\mathcal{F}^{-1}\chi$ 分别为 φ 和 χ 的 Fourier 逆变换, 令

$$\dot{\triangle}_j f=\varphi(2^{-j}D)f=2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}h(2^j(x-y))f(y)dy,\quad j\in\mathbb{Z};$$
$$\dot{S}_j f=\chi(2^{-j}D)f=2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{h}(2^j(x-y))f(y)dy.$$

熟知, 对 Hardy 空间有如下的 Littlewood-Paley 刻画: $f\in\mathcal{H}^1$ 当且仅当

$$\|f\|_{\dot{F}^0_{1,2}}:=\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\dot{\triangle}_j f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^1}<\infty,$$

且存在常数 $C\geqslant c>0$ 使得

$$c\|f\|_{\mathcal{H}^1}\leqslant\|f\|_{\dot{F}^0_{1,2}}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{H}^1},$$

其中 $\dot{F}^0_{1,2}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一般的齐次 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot{F}^s_{q,r}$ $(s\in\mathbb{R},\,q,r\in[1,\infty))$ 的特例.

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{q,r}}:=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jsr}|\dot{\triangle}_j f(x)|^r\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

当 $r=2$ 时, $\dot{F}^s_{q,2}=\dot{H}^{s,q}$ 是熟知的齐次 Sobolev 空间. 类似地有 $\mathbb{R}^n$ 上齐次 Besov 空间 $\dot{B}^s_{q,r}$ $(s\in\mathbb{R},$ $q,r\in[1,\infty])$,

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{q,r}}:=\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jsr}\|\dot{\triangle}_j f(x)\|_{L^q}\right)^{\frac{1}{r}}<\infty.$$

易见

$$\mathcal{H}^1\,(=\dot{F}^0_{1,2})\subset\dot{B}^0_{1,2}.$$

当 $q=r=2$ 时, 对任意的 $s\in\mathbb{R}$, $\dot{B}^s_{2,2}=\dot{F}^s_{2,2}=\dot{H}^{s,2}=\dot{H}^s$, 后者是齐次 Sobolev-Hilbert 空间. 而一般的 (非齐次) Sobolev 空间 $H^s, s\in\mathbb{R}$ 定义为

$$H^s=\{f\in\mathcal{S}'\mid(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(f)(\xi)\in L^2\}.$$

上述关于 Triebel-Lizorkin 和 Besov 空间的严格叙述以及 Hardy 空间的结果参见文献 [2,4,11,20] 等.

当处理带时间变量的函数 $u(t,x)$ 时, 我们需要由 Chemin 和 Lerner [21] 引进的空间 $\tilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{q,r})$. 详见 Bahouri 等人的书 [20]. 对 $T\in(0,\infty]$, $s\in\mathbb{R},\rho,q,r\in[1,\infty]$,

$$\tilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{q,r})=\left\{u\in\mathcal{S}'\;\middle|\;\lim_{j\to-\infty}S_j u=0,\,\|u\|^r_{\tilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{q,r})}:=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\dot{\triangle}_j u\|^r_{L^\rho_T(L^q)}\right\}.$$

注意到若 $\rho=r$, 则 $\tilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{q,r})=L^\rho_T(\dot{B}^s_{q,r})$. 此处及下文中, 为方便计我们用 $L^q(X)$ 表示 $L^q(0,\infty;X)$, 而 $L^r_x(L^q_t)$ 表示先对 t 求 L^q 范数.

本节的最后给出 Coifmann-Lions-Meyer-Semmes 在 Hardy 空间中补偿紧性结果的一个变形.

引理 2.1 设 $\boldsymbol{v}\in L^2, v\in\dot{H}^1$ 满足 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$, 则 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla v\in\dot{B}^0_{1,2}$ 且

$$\|\boldsymbol{v}\cdot\nabla v\|_{\dot{B}^0_{1,2}}\leqslant C\|\boldsymbol{v}\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}.$$

证明 事实上, 这是 Coifmann-Lions-Meyer-Semmes 在 Hardy 空间中补偿紧性结果及 $\mathcal{H}^1$ 嵌入到 $\dot{B}^0_{1,2}$ 的推论. 我们在这里利用 Bony 的仿积分解给出一个直接证明. 为此, 分解

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla v = T_{\boldsymbol{v}}\nabla v + T_{\nabla v}\boldsymbol{v} + R(\boldsymbol{v},\nabla v),$$

其中记号

$$T_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\dot{S}_{k-1}\boldsymbol{u}\cdot\dot{\triangle}_k\boldsymbol{w},\quad R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = \sum_k\sum_{k-1\leqslant l\leqslant k+1}\dot{\triangle}_k\boldsymbol{u}\cdot\dot{\triangle}_l\boldsymbol{w} := \sum_k\dot{\triangle}_k\boldsymbol{u}\cdot\tilde{\dot{\triangle}}_k\boldsymbol{w}.$$

按 $\dot{B}^0_{1,2}$ 的定义, 我们估计

$$\|\dot{\triangle}_j(\boldsymbol{v}\cdot\nabla v)\|_{L^1} \leqslant \|\dot{\triangle}_j(T_{\boldsymbol{v}}\nabla v)\|_{L^1} + \|\dot{\triangle}_j(T_{\nabla v}\boldsymbol{v})\|_{L^1} + \|\dot{\triangle}_j(R(\boldsymbol{v},\nabla v))\|_{L^1}.$$

利用 Littlewood-Paley 分解的性质,

$$\begin{aligned}\|\dot{\triangle}_j(T_{\nabla v}\boldsymbol{v})\|_{L^1} &\leqslant \sum_{|k-j|\leqslant 4}\|\dot{\triangle}_j(\dot{S}_{k-1}\nabla v\cdot\dot{\triangle}_k\boldsymbol{v})\|_{L^1} \leqslant C\sum_{|k-j|\leqslant 4}\|\dot{S}_{k-1}\nabla v\|_{L^2}\|\dot{\triangle}_k\boldsymbol{v}\|_{L^2}\\ &\leqslant C\|\nabla v\|_{L^2}\sum_{|k-j|\leqslant 4}\|\dot{\triangle}_k\boldsymbol{v}\|_{L^2}.\end{aligned}$$

故

$$\sum_j\|\dot{\triangle}_j(T_{\nabla v}\boldsymbol{v})\|^2_{L^1} \leqslant C\|\nabla v\|^2_{L^2}\sum_k\|\dot{\triangle}_k\boldsymbol{v}\|^2_{L^2} \leqslant C\|\nabla v\|^2_{L^2}\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2}.$$

同理可证

$$\sum_j\|\dot{\triangle}_j(T_{\boldsymbol{v}}\nabla v)\|^2_{L^1} \leqslant C\|\nabla v\|^2_{L^2}\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2}.$$

对 $R(\boldsymbol{v},\nabla v)$ 有

$$\begin{aligned}\|\dot{\triangle}_jR(\boldsymbol{v},\nabla v)\|_{L^1} &\leqslant \sum_{k\geqslant j-4}\|\dot{\triangle}_j(\dot{\triangle}_k\boldsymbol{v}\cdot\tilde{\dot{\triangle}}_k\nabla v)\|_{L^1} = \sum_{k\geqslant j-4}\|\dot{\triangle}_j\mathrm{div}(\tilde{\dot{\triangle}}_kv\dot{\triangle}_k\boldsymbol{v})\|_{L^1}\\ &\leqslant C\sum_{k\geqslant j-4}2^j\|\dot{\triangle}_j(\dot{\triangle}_k\boldsymbol{v}\tilde{\dot{\triangle}}_kv)\|_{L^1} \leqslant C\sum_{k\geqslant j-4}2^j\|\dot{\triangle}_k\boldsymbol{v}\|_{L^2}\|\tilde{\dot{\triangle}}_kv\|_{L^2}\\ &\leqslant C\sum_{k\geqslant j-5}2^{j-k}\|\dot{\triangle}_k\nabla v\|_{L^2}\|\boldsymbol{v}\|_{L^2}.\end{aligned}$$

由级数的卷积不等式和 $\nabla v\in L^2=\dot{B}^0_{2,2}$ 即得

$$\|R(\boldsymbol{v},\nabla v)\|_{\dot{B}^0_{1,2}} \leqslant C\|\boldsymbol{v}\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}.$$

故引理得证. □

3 二阶线性抛物型方程的一些混合型端点估计

首先考虑如下 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 中热方程初值问题:

$$\partial_tv-\Delta v=f,\quad v(0,x)=v_0(x). \tag{3.1}$$

对 $v_0\in L^2$, $f\in L^2(\dot H^{-1})$ (在下文中我们总是设定此条件), 由经典理论知上述方程存在弱解 $v\in C([0,\infty);L^2)\cap L^2(\dot H^1)$ (或 $L^2_{\rm loc}(H^1)$) 且

$$\|v\|_{L^\infty(L^2)}+\|v\|_{L^2(\dot H^1)}\leqslant\|v_0\|_{L^2}+\|f\|_{L^2(\dot H^{-1})},$$

此估计即为热方程的能量积分. 事实上, 上述解也可用显式表达,

$$v(t,x)=\mathrm{e}^{t\Delta}v_0+\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}f(s)=G_{\sqrt{t}}*v_0(x)+\int_0^tG_{\sqrt{t-s}}*f(s,\cdot)(x)ds, \tag{3.2}$$

其中 $G(x)=(4\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4}}$ 为 Gauss 热核. 由此可证下面的定理:

定理 3.1 [11] 设 $r_1\in(1,\infty),r_2\in[r_1,\infty),s_2\geqslant s_1,q\in(1,\infty)$ 满足

$$\frac{2}{q}=\left(s_2-\frac{n}{r_2}\right)-\left(s_1-\frac{n}{r_1}\right).$$

则存在仅依赖于上述参数的常数 C 使得

$$\|\mathrm{e}^{t\Delta}v_0(x)\|_{L^q(\dot H^{s_2,r_2})}\leqslant C\|v_0\|_{\dot H^{s_1,r_1}}. \tag{3.3}$$

注 3.1 我们只在定理 4.2 的证明中用到此定理当 $n=2$, $s=2$, $q=r_2=\frac{4}{3}$ 的情形, 此时可取 $s_1=0$, $r_1=2$, 即对二维的热方程有如下估计:

$$\|\nabla^2\mathrm{e}^{t\Delta}v_0(x)\|_{L^{\frac{4}{3}}(L^{\frac{4}{3}})}\leqslant C\|v_0\|_{L^2}.$$

至于 f 不为零的情形也有一般的结果, 由于我们只需用到 (1.10), 故不再赘述.

若要将上述估计推广到端点 ($q,r_1=1$ 或 ∞) 情形, 在 Besov 空间中做估计是最自然的. 事实上, 对上述初值问题有下面的定理:

定理 3.2 [20, 定理 2.2.3] 设 $s\in\mathbb{R}$, $\rho,q,r\in[1,\infty]$. 若 $v_0\in\dot B^s_{q,r}$, $f\in\tilde L^\rho(\dot B^{s-2+\frac{2}{\rho}}_{q,r})$, 则初值问题 (3.1) 有唯一解 $v\in\tilde L^\rho(\dot B^{s+\frac{2}{\rho}}_{q,r})\cap\tilde L^\infty(\dot B^s_{q,r})$ 且存在仅依赖于 n 的常数 C 使得对任意的 $\rho_1\in[\rho,\infty]$ 有

$$\|v\|_{\tilde L^{\rho_1}(\dot B^{s+\frac{2}{\rho_1}}_{q,r})}\leqslant C(\|v_0\|_{\dot B^s_{q,r}}+\|f\|_{\tilde L^\rho(\dot B^{s-2+\frac{2}{\rho}}_{q,r})}). \tag{3.4}$$

我们关注的是一个端点情形 $q=1$, $r=2$, $s=1$, $\rho=\rho_1=2$, 即

$$\|v\|_{\tilde L^2(\dot B^2_{1,2})}\leqslant C(\|v_0\|_{\dot B^1_{1,2}}+\|f\|_{\tilde L^2(\dot B^0_{1,2})}). \tag{3.5}$$

注意此时 $\tilde L^2_T(\dot B^2_{1,2})=L^2_T(\dot B^2_{1,2})$.

下面考虑热方程在 Hardy 空间中的估计. 首先考虑 $f=0$ 的情形, 即下述初值问题:

$$\partial_tv-\Delta v=0,\quad v(0,x)=v_0(x)\in L^2. \tag{3.6}$$

注 3.2 由热核的光滑效应, 我们知道对任意的 $t>0$, $v(t,\cdot)$ 是 H^m- 函数 (对任意的 $m\in\mathbb{N}$, 从而是 C^∞ 光滑函数), 其 H^m- 范数依赖于 $t>0$.

注 3.3 对如下在 $(-\infty,s)$, $s\in\mathbb{R}$ 中的倒向热方程都有类似于 (正向) 热方程的结果:

$$\partial_tv+\Delta v=f,\quad v(t,x)\mid_{t=s}=v_0(x). \tag{3.7}$$

我们的第一个结果是下面的定理:

定理 3.3 设 $v_0 \in \mathcal{H}^1$, 则 $v(t,x) \in L^\infty(\mathcal{H}^1)$, $\nabla v(t,x) \in L^2(\mathcal{H}^1)$ 且存在仅与 n 有关的常数 C 使得

$$\|v\|_{L^\infty(\mathcal{H}^1)} + \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{H}^1)} \leqslant C\|v_0\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{3.8}$$

证明 对 v 的估计是热核半群性质的一个简单推论. 由解的表达式 (3.2) 得

$$v(t,x) = G_{\sqrt{t}} * v_0(x), \quad \sup_{t>0}|v(t,x)| = \sup_{t>0}|G_{\sqrt{t}} * v_0(x)| = \mathcal{M}_G(v_0)(x).$$

再由 Hardy 空间的定义 (极大函数刻画), $v \in L^1_x(L^\infty_t)$ 且

$$\|v\|_{L^\infty_t(L^1_x)} \leqslant \|v\|_{L^1_x(L^\infty_t)} \leqslant \|G_{\sqrt{t}} * v_0\|_{L^1} \leqslant \|v_0\|_{\mathcal{H}^1}.$$

进一步, 为证 $v \in L^\infty(\mathcal{H}^1)$, 考虑

$$\mathcal{M}_G(v(t,\cdot))(x) = \sup_{\tau>0}|G_{\sqrt{\tau}} * v(t,\cdot)(x)| = \sup_{\tau>0}\left|\int_{\mathbb{R}^n} G_{\sqrt{\tau}}(x-y)v(t,y)dy\right|.$$

由热核半群性质, 对任意的 $t>0$,

$$G_{\sqrt{\tau}} * v(t,\cdot)(x) = G_{\sqrt{\tau}+\sqrt{t}} * v_0(x).$$

故

$$\|\mathcal{M}_G(v(t,\cdot))(x)\|_{L^1_x} \leqslant \|\mathcal{M}_G(v_0)(x)\|_{L^1} \leqslant \|v_0\|_{\mathcal{H}^1},$$

此即

$$\|v\|_{L^\infty(\mathcal{H}^1)} \leqslant \|v_0\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{3.9}$$

下证 $\partial_i v = \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\mathcal{H}^1)$, $i=1,2,\dots,n$. 记 $G^i(x) = \partial_i G(x)$. 考虑到 $\partial_i v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} G^i_{\sqrt{t}} * v_0(x)$,

$$\left(\int_0^\infty |\partial_i v(t,x)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\infty |G^i_{\sqrt{t}} * v_0(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\int_0^\infty |G^i_t * v_0(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

注意到 $\int_{\mathbb{R}^n} G^i(x)dx = 0$, 上式右端即为平方函数 $g_{G^i}(v_0)$. 由 $\mathcal{H}^1$ 的平方函数刻画,

$$\|\partial_i v\|_{L^1_x(L^2_t)} \leqslant \sqrt{2}\|g_{G^i}(v_0)\|_{L^1} \leqslant C\|v_0\|_{\mathcal{H}^1}.$$

由 Minkowski 不等式即得

$$\|\partial_i v\|_{L^2(L^1)} \leqslant C\|v_0\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant C\|v_0\|_{\mathcal{H}^1}.$$

我们证明了 ∇v 的 $L^2(L^1)$ 估计. 进一步, 考虑 $\partial_i v$ 的 Riesz 变换

$$R_k\partial_i v = \partial_i(R_k(v)) = \frac{1}{\sqrt{t}} G^i_{\sqrt{t}} * R_k(v_0), \quad k=1,2,\dots,n.$$

由 Riesz 变换的 $\mathcal{H}^1$- 有界性,

$$\|R_k\partial_i v\|_{L^2_t(L^1_x)} \leqslant \|R_k\partial_i v\|_{L^1_x(L^2_t)} = \sqrt{2}\|g_{G^i}(R_k(v_0))\|_{L^1_x} \leqslant C\|R_k(v_0)\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant C\|v_0\|_{\mathcal{H}^1}.$$

再由 $\mathcal{H}^1$ 的 Riesz 变换刻画即得 $\nabla v \in L^2(\mathcal{H}^1)$ 且

$$\|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{H}^1)} \leqslant C\|v_0\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{3.10}$$

定理得证. □

注 3.4 进一步可证得 $v\in C([0,\infty);\mathcal{H}^1)$, 此处从略.

作为上述定理的一个推论, 若要求初值的梯度在 Hardy 空间中, 则有下面的推论:

推论 3.1 设初值问题 (3.6) 中 $\nabla v_0\in\mathcal{H}^1$, 则 $\nabla v(t,x)\in L^\infty(\mathcal{H}^1)$, $\partial_t v,\nabla^2 v(t,x)\in L^2(\mathcal{H}^1)$ 且存在仅与 n 有关的常数 C 使得

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\mathcal{H}^1)}+\|\partial_t v,\nabla^2 v\|_{L^2(\mathcal{H}^1)}\leqslant C\|\nabla v_0\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{3.11}$$

证明 对方程 (3.6) 求导并利用定理 3.3 得

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\mathcal{H}^1)}+\|\nabla^2 v\|_{L^2(\mathcal{H}^1)}\leqslant C\|\nabla v_0\|_{\mathcal{H}^1}.$$

再由方程知, $\partial_t v=\Delta v$, 故对 $\partial_t v$ 有同样的估计. □

下面考虑零初值问题

$$\partial_t v-\Delta v=f,\quad v(0,x)=0. \tag{3.12}$$

正如第 1 节中指出的那样, 我们希望当 $f\in L^2(\mathcal{H}^1)$ 时得到 $\partial_t v,\nabla^2 v\in L^2(\mathcal{H}^1)$. 可惜证明这样的结果似乎有一定的困难. 我们给出下述定理:

定理 3.4 假设 (3.12) 中 $f(t,x)\in L^1(\mathcal{H}^1)$, 则 $\nabla v(t,x)\in L^2(\mathcal{H}^1)$ 且存在常数 C 使得

$$\|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{H}^1)}\leqslant C\|f\|_{L^1(\mathcal{H}^1)}.$$

证明 与上一定理的证明类似. 注意到

$$v(t,x)=\int_0^t(G_{\sqrt{t-s}}*f(s,\cdot))(x)ds,\quad \partial_i v(t,x)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}(G^i_{\sqrt{t-s}}*f(s,\cdot))(x)ds.$$

由 Minkowski 不等式,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty|\partial_i v(t,x)|^2dt\right)^{\frac12}&\leqslant\int_0^\infty\left(\int_s^\infty\frac{1}{t-s}|(G^i_{\sqrt{t-s}}*f(s,\cdot))(x)|^2dt\right)^{\frac12}ds\\&=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\frac1t|(G^i_{\sqrt t}*f(s,\cdot))(x)|^2dt\right)^{\frac12}ds=\sqrt2\int_0^\infty g_{G^i}(f(s,\cdot))(x)ds,\\ \|\partial_i v\|_{L^2_t(L^1_x)}\leqslant\|\partial_i v\|_{L^1_x(L^2_t)}\leqslant\sqrt2&\int_0^\infty\|g_{G^i}(f(s,\cdot))\|_{L^1}ds\leqslant C\int_0^\infty\|f(s,\cdot)\|_{\mathcal{H}^1}ds=C\|f\|_{L^1(\mathcal{H}^1)}.\end{aligned}$$

进一步考虑 $\partial_i v$ 的 Riesz 变换

$$R_k\partial_i v(t,x)=\partial_i R_k v(t,x)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}(G^i_{\sqrt{t-s}}*R_kf(s,\cdot))(x)ds,\quad k=1,2,\dots,n.$$

类似可得 $\|R_k\partial_i v\|_{L^2_t(L^1_x)}\leqslant\|R_k\partial_i v\|_{L^1_x(L^2_t)}\leqslant C\|f\|_{L^1(\mathcal{H}^1)}$. 从而, $\partial_i v\in L^2(\mathcal{H}^1)$ 且

$$\|\partial_i v\|_{L^2_t(L^1_x)}\leqslant C\|f\|_{L^1(\mathcal{H}^1)}. \tag{3.13}$$

定理证毕. □

结合推论 3.1 和上述定理, 对一般的初值问题 (3.1) 我们有下面的推论:

推论 3.2 假设 $v_0\in L^2$, $\nabla v_0\in\mathcal{H}^1$, $f\in L^2(H^{-1})$, $\nabla f\in L^1(\mathcal{H}^1)$, 则对初值问题 (3.1) 的解有估计

$$\|\partial_t v,\,\nabla^2 v\|_{L^2(\mathcal{H}^1)}\leqslant\|\nabla v_0\|_{\mathcal{H}^1}+C\|\nabla f\|_{L^1(\mathcal{H}^1)}. \tag{3.14}$$

将方程 (3.1) 中外力项 $f\in L^2(\dot{H}^{-1})$ 写成 $\mathrm{div}\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\dots,f_n)$, $f_j\in L^2(L^2)$, $j=1,2,\dots,n$ 的形式, 考虑方程

$$\partial_t v-\Delta v=\mathrm{div}\boldsymbol{f},\quad v(0,x)=v_0(x). \tag{3.15}$$

由对偶讨论, 我们进一步证明如下定理:

定理 3.5 设 $v_0\in \mathrm{BMO}(\cap L^2)$, $\boldsymbol{f}\in L^2(\mathrm{BMO})(\cap L^2(L^2))$, $j=1,2,\dots,n$, 则 $v\in L^\infty(\mathrm{BMO})$, 且

$$\|v\|_{L^\infty(\mathrm{BMO})}\leqslant \|v_0\|_{\mathrm{BMO}}+C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\mathrm{BMO})}. \tag{3.16}$$

证明 首先考虑 $\boldsymbol{f}=0$ 的情形. 为此取任意的 $u_0\in\mathcal{H}^1$ 并在任意的时间段 $[0,s]$, $s>0$ 上考虑倒向热方程的初值问题

$$\partial_t u+\Delta u=0,\quad u(t,x)\,|_{t=s}=u_0(x).$$

由定理 3.3 和注 3.3, 此问题的解 $u(t,x)$ 对任意的 $t\in(0,s)$ 光滑并且满足 $\|u(0,\cdot)\|_{\mathcal{H}^1}\leqslant\|u_0\|_{\mathcal{H}^1}$. 将 u 乘以方程 (3.15) 的两端并在 $(0,s)\times\mathbb{R}^n$ 上积分得

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(s,x)v(s,x)dx-\int_{\mathbb{R}^n}u(0,x)v_0(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t u+\Delta u)vdxdt=0,$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(s,x)v(s,x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}u(0,x)v_0(x)dx.$$

从而,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}u(s,x)v(s,x)dx\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}u(0,x)v_0(x)dx\right|\leqslant\|u(0,\cdot)\|_{\mathcal{H}^1}\|v_0\|_{\mathrm{BMO}}.$$

由 $\mathcal{H}^1$ 和 BMO 的对偶性即得对任意的 $s>0$,

$$\|v(s,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant\|v_0\|_{\mathrm{BMO}}. \tag{3.17}$$

再考虑初值 $v_0=0$ 的情形. 对任意的 $g\in L^1(\mathcal{H}^1)$, 考虑如下在 $[0,s]$ 上的倒向热方程:

$$\partial_t u+\Delta u=g(t,x),\quad u(t,x)\,|_{t=s}=0.$$

由定理 3.4 知, $\|\nabla u\|_{L^2_s(\mathcal{H}^1)}\leqslant C\|g\|_{L^1_s(\mathcal{H}^1)}$, 且此估计中常数 C 与 s 无关. 将 u 乘以方程 (3.15) 的两边并在 $(0,s)\times\mathbb{R}^n$ 上作分部积分得

$$\int_0^s\int_{\mathbb{R}^n}u\mathrm{div}\boldsymbol{f}dxdt=-\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t u+\Delta u)vdxdt=-\int_0^s\int_{\mathbb{R}^n}vgdxdt,$$

即

$$\int_0^s\int_{\mathbb{R}^n}\boldsymbol{f}\cdot\nabla u(t,x)dxdt=\int_0^s\int_{\mathbb{R}^n}vgdxdt.$$

从而对任意的 $g\in L^1(\mathcal{H}^1)$ 有

$$\left|\int_0^s\int_{\mathbb{R}^n}vgdxdt\right|=\left|\int_0^s\int_{\mathbb{R}^n}\boldsymbol{f}\cdot\nabla udxdt\right|\leqslant\|u\|_{L^2(\mathcal{H}^1)}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\mathrm{BMO})}\leqslant C\|g\|_{L^1(\mathcal{H}^1)}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\mathrm{BMO})}.$$

故

$$\|v\|_{L^\infty_s(\mathrm{BMO})}\leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2_s(\mathrm{BMO})}\leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\mathrm{BMO})} \tag{3.18}$$

且常数 C 与 s 无关. □

注 3.5 尽管未能证明 $\nabla v \in L^2(\mathrm{BMO})$, 但由 L^2 与 BMO 之间的插值知,

$$v_0 \in L^r, \quad \boldsymbol{f} \in L^2(L^r), \quad \forall\, r \in [2, \infty).$$

从而由抛物型方程的 $L^q(L^r)$- 时空混合估计知,

$$\|\nabla v\|_{L^2(L^r)} \leqslant C_r(\|v_0\|_{L^r} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(L^r)}), \quad \forall\, r \in [2, \infty).$$

注 3.6 我们注意到对 BMO 函数有所谓的 Carleson 测度刻画, 即当外力项为零而 $v_0 \in \mathrm{BMO}$ 时, 热方程初值问题的解 $v(t,x) = \mathrm{e}^{t\Delta}v_0(x)$ 满足 $d\mu = |\nabla v|^2 dxdt$ 是 Carleson 测度,

$$\|d\mu\|_{\mathcal{C}} := \sup_{B_r \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B_r|} \int_0^r \int_{B_r} |\nabla v(t,x)|^2 dxdt < \infty.$$

反之亦然, 且存在常数 $C \geqslant c > 0$ 使得 $c\|v_0\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \|d\mu\|_{\mathcal{C}} \leqslant C\|v_0\|_{\mathrm{BMO}}$, 参见文献 [4, 22]. 从这个结果来看, 定理中方程的解什么时候能满足 $\nabla v \in L^2(\mathrm{BMO})$, 应该对 v_0 和 $\boldsymbol{f}$ 有一个刻画. 我们希望在后续工作中能够讨论这个问题.

类似于推论 3.2, 作为定理 3.5 的推论有下面的推论:

推论 3.3 假设 (3.15) 中 $f\ (= \mathrm{div}\boldsymbol{f}) \in L^2(\mathrm{BMO})$, $\nabla v_0 \in \mathrm{BMO}$, 则

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\mathrm{BMO})} \leqslant \|\nabla v_0\|_{\mathrm{BMO}} + C\|f\|_{L^2(\mathrm{BMO})}. \tag{3.19}$$

4 在 Navier-Stokes 方程中的应用

考虑 Navier-Stokes 方程 (1.3) 赋予 $\boldsymbol{u}_0 \in L^2$, $\mathrm{div}\boldsymbol{u}_0 = 0$ 的初值问题. 如前所述, 其存在一个弱解 $\boldsymbol{u} \in L^\infty(L^2) \cap L^2(\dot{H}^1)$. 本节的第一个结果是定理 3.2 和引理 2.1 的推论, 对任意空间维数都成立.

定理 4.1 假设 $\boldsymbol{u}_0 \in L^2 \cap \dot{B}^1_{1,2}$, 则 Navier-Stokes 方程 (1.3) 的解 $\boldsymbol{u}$ 满足 $\boldsymbol{u} \in L^2(\dot{B}^2_{1,2})$, $\partial_t \boldsymbol{u} \in L^2(\dot{B}^0_{1,2})$ 且其范数被初值控制.

证明 由引理 2.1, $\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \in L^2(\dot{B}^0_{1,2})$. 再注意到 (1.6) 和椭圆估计

$$\|p\|_{\dot{B}^{s+1}_{q,r}} \leqslant C\|\Delta p\|_{\dot{B}^{s-1}_{q,r}}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \quad q, r \in [1, \infty]$$

得 $p \in L^2(\dot{B}^1_{1,2})$. 将方程写成 (1.7) 的形式, 则右端项属于 $L^2(\dot{B}^0_{1,2})$. 由 (3.5), 即得所证. □

上述结果可以作为 Lions 问题在任意高维空间的一个替代回答. 在二维情形, 我们可以得到更好的结果.

定理 4.2 假设空间维数 $n = 2$, 初值 $\boldsymbol{u}_0 \in L^2$, $\mathrm{div}\boldsymbol{u}_0 = 0$, $\nabla \boldsymbol{u}_0 \in \mathcal{H}^1$, 则 Navier-Stokes 方程的整体弱解 $\boldsymbol{u} \in L^\infty(L^2) \cap L^2(\dot{H}^1)$ 满足 $\partial_t \boldsymbol{u}, \nabla^2 \boldsymbol{u} \in L^2(\mathcal{H}^1)$ 且存在与 $\boldsymbol{u}_0$ 无关的常数 $C > 0$ 使得

$$\|\partial_t \boldsymbol{u}, \nabla^2 \boldsymbol{u}\|_{L^2(\mathcal{H}^1)} \leqslant C((1 + \|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2})^3 + \|\nabla \boldsymbol{u}_0\|_{\mathcal{H}^1}).$$

证明 因为空间维数 $n = 2$, $\dot{H}^1 \subset \mathrm{BMO}$, 由插值可知, $\boldsymbol{u} \in L^4(L^4)$, 从而 $\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \in L^{\frac{4}{3}}(L^{\frac{4}{3}})$ 且

$$\|\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}\|_{L^{\frac{4}{3}}(L^{\frac{4}{3}})} \leqslant C\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^2}.$$

由椭圆估计 (奇异积分的 L^r- 有界性) 知, 对压力的梯度 ∇p 亦有上述估计. 将 Navier-Stokes 方程看成外力项为 $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \nabla p$ 的形式 (1.7) 并用热核表示成

$$\boldsymbol{u}(t,x) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0(x) + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\boldsymbol{f}(s,x)ds.$$

由 (1.10) 和注 3.1 得 $\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|_{L^{\frac{4}{3}}(L^{\frac{4}{3}})} \leqslant C(1+\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2})^2$. 再由定理 1.1 知, $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\partial_i\boldsymbol{u} \in L^1(\mathcal{H}^1)$ 且

$$\|\boldsymbol{u}\cdot\nabla\partial_i\boldsymbol{u}\|_{L^1(\mathcal{H}^1)} \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_{L^4(L^4)}\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|_{L^{\frac{4}{3}}(L^{\frac{4}{3}})} \leqslant C(1+\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2})^3.$$

现在对 Navier-Stokes 方程求一阶空间导数 ∂_i, $i=1,2$ 得

$$\partial_t\partial_i\boldsymbol{u} - \Delta\partial_i\boldsymbol{u} = -\partial_i\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\partial_i\boldsymbol{u} - \nabla\partial_i p, \quad i=1,2.$$

由推论 3.2 (此处要求初值满足 $\nabla\boldsymbol{u}_0 \in \mathcal{H}^1$), 为证得定理, 只需验证 $\partial_i\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$, $\partial_i\nabla p \in L^1(\mathcal{H}^1)$ 且

$$\|\partial_i\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}, \partial_i\nabla p\|_{L^1(\mathcal{H}^1)} \leqslant C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^2.$$

这正是定理 1.2 中的 (1.5), 且对任意空间维数都成立. □

注 4.1 尽管将 Navier-Stokes 方程写成 (1.7) 的形式后右端项属于 $L^2(\mathcal{H}^1)$, 由于并未对热方程得到形如 (1.9) 的估计, 故不能直接得到所要结果. 在证明过程中我们利用了二维情形的二阶导数估计 $\nabla^2\boldsymbol{u} \in L^{\frac{4}{3}}(L^{\frac{4}{3}})$, 这是由 $\boldsymbol{u} \in L^4(L^4)$ 得到的, 而这是能量估计结合二维时 $\dot{H}^1$ 嵌入到 BMO 的推论. 在三维情形, 能量估计只给出了 $\boldsymbol{u} \in L^{\frac{10}{3}}(L^{\frac{10}{3}})$, 从而 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}, \nabla^2\boldsymbol{u} \in L^{\frac{5}{4}}(L^{\frac{5}{4}})$, $\boldsymbol{u}\cdot\partial_i\nabla\boldsymbol{u}$ 已不在 Lebesgue (时空) 可积空间, 故我们的证明方法失效.

5 总结

在本文中, 基于 Lions 关于 Navier-Stokes 方程整体弱解二阶导数估计的一个问题, 我们讨论了热方程初值问题的几类时空混合型端点估计. 此处端点主要是指所讨论的函数空间关于空间变量是端点情形, 如 Hardy 或 BMO 空间. 这种端点估计跟特意为热方程而设计的抛物型 Hardy 或 BMO 空间是不同的, 后者可理解为时空都处在端点情形. 从方程的结构看, 做这样的估计似乎是勉为其难, 但从调和分析的观点看, 这样的估计又是自然的. 利用 Hardy 空间的各种刻画及对偶讨论, 我们得到了热方程在 Hardy 和 BMO 空间中的估计, 并部分地回答了 Lions 的问题.

致谢 作者对审稿人耐心阅读本文初稿并指出几处错误表示感谢.

参考文献

1 Fefferman C, Stein E M. H^p spaces of several variables. Acta Math, 1972, 129: 137–193
2 Grafakos L. Modern Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics, 250. New York: Springer, 2009
3 陆善镇. H^p 空间的实变理论及其应用. 上海: 上海科学技术出版社, 1992
4 Stein E M. Harmonic Analysis. New Jersey: Princeton University Press, 1993
5 Coifman R, Lions P L, Meyer Y, et al. Compensated compactness and Hardy spaces. J Math Pures Appl, 1993, 72: 247–286
6 Lions P L. Mathematical Topics in Fluid Dynamics, vol. 1. Incompressible Models. Oxford: Oxford Science Publication, 1996
7 Fabes E B, Rivière N M. Singular integrals with mixed homogeneity. Studia Math, 1966, 27: 19–38.
8 Fabes E B, Lewis J E, Rivière N M. Singular integrals and hydrodynamic potentials. Amer J Math, 1977, 99: 601–625
9 Amann H. Linear and Quasilinear Parabolic Problems, I. Basel: Birkhäuser Verlag, 1995
10 Ladyžhenskaya O A, Solonnikov V A, Uralt'ceva N N. Linear and Quasi-linear Parabolic Equations. Providence, RI: Amer Math Soc, 1968
11 苗长兴, 张波. 偏微分方程的调和分析方法. 北京: 科学出版社, 2008
12 Calderón A P, Torchinsky A. Parabolic maximal functions associated with a distribution. Adv Math, 1975, 16: 1–64

13 Calderón A P, Torchinsky A. Parabolic maximal functions associated with a distribution, II. Adv Math, 1977, 24: 101–171
14 Coifman R, Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. Bull Amer Math Soc, 1977, 83: 569–645
15 Auscher P, Bernicot F, Zhao J M. Maximal regularity and Hardy spaces. Collect Math, 2009, 59: 103–127
16 Tang L. Interior h^1 estimates for parabolic equations with LMO coefficients. Canad J Math, 2010, 62: 202–217
17 Duong X T, Yan L X. Duality of Hardy and BMO spaces associated with operators with heat kernel bounds. J Amer Math Soc, 2005, 18: 943–973
18 Duong X T, Yan L X. New function spaces of BMO type, the John-Nirenberg inequality, interpolation, and applications. Comm Pure Appl Math, 2005, 58: 1375–1420
19 Uchiyama A. Characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of generalized Littlewood-Paley g-functions. Studia Math, 1985, 81: 135–158
20 Bahouri H, Chemin J V, Danchin R. Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 2011
21 Chemin J Y, Lerner N. Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes. J Differential Equations, 1995, 121: 314–328
22 Fabes E B, Neri U. Characterization of temperatures with initial data in BMO. Duke Math J, 1975, 42: 725–734

Some endpoint estimates for heat equation with application to Navier-Stokes equations

CAO ZhengZi, LI BuYang & SUN YongZhong

Abstract We obtain some estimates in Hardy, BMO and Besov spaces for solutions to the initial value problem of heat equation. Combined with Coifmann-Lions-Meyer-Semmes' result on compensated compactness in Hardy spaces, we also give some endpoint estimates for the second order derivatives of global weak solutions to Navier-Stokes equations.

Keywords Hardy space, BMO space, Besov spaces, heat equation, Navier-Stokes equations

MSC(2010) 42B35, 35K15, 35Q30

doi: 10.1360/N012013-00156